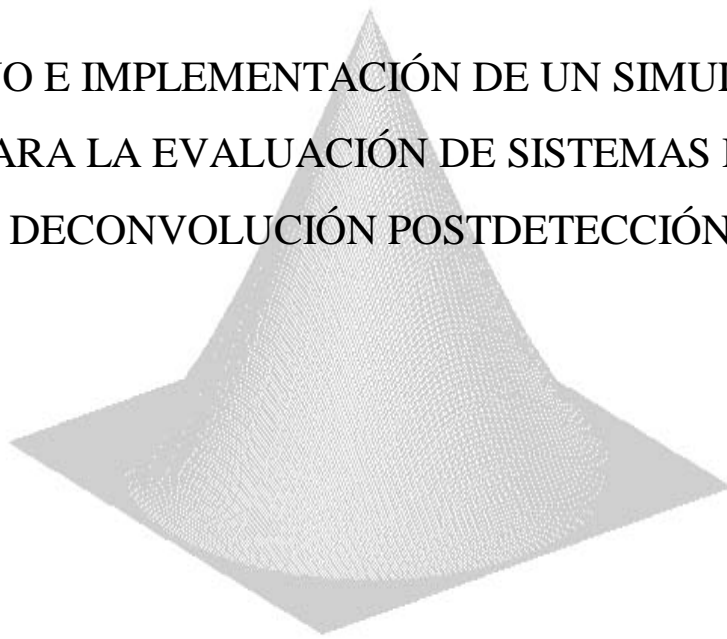


UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
ÁREA DE ÓPTICA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN SIMULADOR
PARA LA EVALUACIÓN DE SISTEMAS DE
DECONVOLUCIÓN POSTDETECCIÓN



Justo Arines Piferrer

Santiago de Compostela, Julio 1999

Salvador Xurxo Bará Viñas, Profesor Titular de Universidade da Área de Óptica
(Departamento de Física Aplicada) da Universidade de Santiago de Compostela,

FAI CONSTAR

Que a memoria titulada “**Diseño e implementación de un simulador para la evaluación de sistemas de Deconvolución Postdetección**” foi realizada por D. Justo Arines Piferrer baixo a súa dirección e constitúe a tesina que presenta para optar ao Grao de Licenciado en Física.

En Compostela, a 21 de Junio de 1999

Asdo.: Salvador X. Bará

ÍNDICE:

Introducción	1
Capítulo I: Efectos de la turbulencia atmosférica en la degradación de imágenes	5
1.1 Turbulencia atmosférica.....	6
1.1.1 Estadística del índice de refracción.....	6
1.1.2 Descripción estadística de la fase.....	11
1.2 Formación de imagen	21
1.3 Efectos de la turbulencia atmosférica sobre la formación de imagen.....	29
1.3.1 OTF de larga exposición	32
1.3.2 OTF de corta exposición.....	36
Capítulo II: Estrategias de reconstrucción de imagen	41
2.1 Interferometría Speckle.....	42
2.2 Sistemas Adaptativos.....	45
2.3 Deconvolución Postdetección.....	49
2.3.1 Canal de la imagen.....	52
2.3.2 Canal del sensor de frente de onda	52
2.3.2.1 Sensor Shack-Hartmann	53
2.3.3 Deconvolución de la imagen.....	58

Capítulo III: Diseño de un simulador de sistemas de Deconvolución Postdetección	65
3.1 Descripción del simulador	66
3.1.1 Generación de la distorsión de fase sobre la apertura del sistema....	69
3.1.2 Canal de la imagen	71
3.1.2.1 Cómputo de la OTF.....	71
3.1.2.2 Simulación de la imagen	76
3.1.2.3 Cómputo del ruido fotónico	77
3.1.2.4 Degradación y Restauración	78
3.1.3 Canal del sensor de frente de onda	80
3.2 Parámetros de calidad del simulador.....	84
3.2.1 Comprobación de la estadística de la fase simulada.....	84
3.2.2 Sensor Shack-Hartmann.....	86
3.3 Parámetros de calidad de la reconstrucción y restauración	88
Capítulo IV: Evaluación del simulador y ejemplos de aplicación	91
4.1 Evaluación de la calidad de la simulación.....	92
4.1.1 Simulación de la perturbación de fase	92
4.1.2 Simulación del sensor de frente de onda tipo Shack-Hartmann.....	95
4.2 Calidad de la reconstrucción	97
4.2.1 Reconstrucción del frente	97
4.2.2 Reconstrucción de la OTF.....	102
4.3 Calidad de la restauración	105
Capítulo V: Conclusiones	115
Apéndice A	119
Referencias	121

AGRADECIMIENTOS:

Y en primer lugar debo mi agradecimiento a D. Salvador X. Bará¹ por haberme permitido realizar este trabajo, igualmente agradecerle el tiempo que me dedicó así como las discusiones e ideas que permitieron que este trabajo llegara a buen puerto.

Otro efusivo agradecimiento a los miembros de mi grupo de investigación. Por orden alfabético: Jorge Ares, Teresa Mancebo y Julián A. Mayor.

Le debo especialmente gran parte de este trabajo al señor Jorge Ares, porque el estar encerrado con alguien en un laboratorio da para hablar, idear, discutir y discrepar, pero sobre todo para pensar en cómo implementar los algoritmos necesarios para desarrollar el simulador.

Agradecer con igual afecto, cariño, emoción, efusividad, calor, temperatura, intercambio irónico, pasión, etc, al resto de los Nobecarios y Diego. Por orden alfabético: Carmen Bao, Maite Flores, Diego Sotelo, Marian Varela, Oscar Varela, José Manuel Vieites, la prófuga Silvia Vidal y José Manuel. De forma especial a Maite porque aún después de tener que aguantarme en el despacho se atrevía a formar parte de mi pandilla.

No podía faltar otra mención especial a los miembros del piso de abajo y resto de despachos, dense todos por agradecidos.

De forma muy especial le agradezco a Justo Arines el haberme soportado tantas horas delante del ordenador, le prometo ser más rápido en la realización de los futuros programas.

Agradecer por último a toda la gente que con gran espíritu fraternal lleva preguntando desde junio de 1998 *¿ Cuándo presentas la tesina?* y luego una suave risa *jejejejeje*, a lo cual yo respondía, *pronto*.

¹ Es mi “feje”.

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto titulado "*Imagen de alta resolución: Aplicación a la imagen de fondo de ojo*" (CICYT TIC98-0925-C02-02).

Introducción

Desde que en 1609 Galileo orientase su telescopio hacia el cielo la óptica astronómica ha estado sufriendo una constante evolución. En los últimos años la evolución ha sido sorprendente gracias a la incorporación de nuevas tecnologías.

El empleo de la cámara fotográfica como medio de registro ya fue un gran avance en su tiempo, pero hoy en día su versatilidad ha sido superada por las CCD (Charge-Coupled Device). Otro factor importante en la gran evolución sufrida por la óptica astronómica en el último siglo ha sido el grado de conocimiento adquirido sobre el comportamiento de la atmósfera. Este conocimiento ha permitido desarrollar técnicas que son capaces de compensar el efecto degradador de la atmósfera sobre la calidad de imagen.

El objetivo de este trabajo es presentar un simulador para el estudio de la técnica de mejora de la calidad de imágenes astronómicas conocida por los nombres de Deconvolución a posteriori, Deconvolución postdetección y Holografía Speckle. Esta técnica se desarrolla dentro del marco de los sistemas lineales invariantes al desplazamiento. Este marco de aplicación nos permite emplear esta técnica únicamente dentro de lo que se conoce como región isoplanática. Esta región se define como aquella región de cielo que puede ser descrita por la misma PSF, lo que indica que la atmósfera se puede considerar como un sistema lineal invariante al desplazamiento. Para hacernos una idea del tamaño del que hablamos para un valor del parámetro de Fried de 10 cm el ancho de la región isoplanática es de 2.5 arcsec .

En el capítulo 1 realizaremos una descripción teórica de los efectos de la turbulencia atmosférica en la degradación de las imágenes. Empezaremos describiendo la turbulencia atmosférica en el apartado 1.1, presentando los distintos modelos teóricos existentes sobre la estadística del índice de refracción de la atmósfera. También describiremos la estadística de la perturbación de fase introducida por la atmósfera y así mismo proporcionaremos una descripción modal de la perturbación de fase. En el apartado 1.2 trataremos el proceso de formación de imagen desde el punto de vista de la óptica de Fourier. Empezaremos con una breve introducción a lo que son los sistemas lineales y posteriormente desarrollaremos los conceptos de PSF, OTF, MTF. Por último presentaremos una descripción del proceso de formación de imagen desde un punto de vista interferométrico. En el apartado 1.3 intentaremos presentar cuales son los efectos de la turbulencia atmosférica en el proceso de formación de imagen, mostrando cuantitativa y cualitativamente el efecto de la perturbación introducida por la turbulencia atmosférica sobre la OTF atmosférica de larga y corta exposición. Por último mostraremos algunos ejemplos de imágenes degradadas por la turbulencia atmosférica.

En el capítulo 2 presentaremos distintas estrategias de reconstrucción de imágenes. Comenzaremos con la técnica de Interferometría Speckle en el apartado 2.1, realizando una breve descripción de los procesos implicados. En el apartado 2.2

presentaremos la técnica conocida como Óptica Adaptativa. Por último en el apartado 2.3 trataremos de describir de forma un poco más pormenorizada la técnica de Deconvolución a Posteriori, realizando primero una descripción general y posteriormente centrándonos en los distintos sistemas implicados en esta técnica.

En el capítulo 3 presentaremos el simulador de sistemas de Deconvolución a Posteriori desarrollado en este trabajo. En el apartado 3.1 describiremos el simulador que queremos implementar así como su proceso de diseño. Empezaremos con una descripción general y posteriormente iremos describiendo cada uno de los módulos implementados, módulo de generación de distorsiones de fase, canal de la imagen, OTF del sistema telescopio-atmósfera. canal del sensor de frente de onda (sensor Shack-Hartmann), OTF estimada, degradación y reconstrucción de la imagen. En el apartado 3.2 analizaremos la calidad del simulador haciendo hincapié en la fiabilidad de la simulación de las pantallas de fase aleatorias, mientras que en el apartado 3.3 presentaremos los parámetros que emplearemos para comprobar la calidad de la reconstrucción del frente y de la restauración de las imágenes

En el capítulo 4 presentaremos los resultados numéricos de la evaluación realizada en el capítulo 3. En el apartado 4.1 presentaremos los resultados del análisis de la calidad de la simulación. En el apartado 4.2 evaluaremos la calidad de la reconstrucción del frente en función del parámetro de Fried y el nivel de ruido fotonico. La calidad de la restauración la analizaremos en el apartado 4.3, empleando para el caso tanto objetos extensos como puntuales.

En el capítulo 5 trataremos de resumir la validez del simulador, presentaremos las conclusiones y las perspectivas de futuro.

CAPITULO I:

Efectos de la Turbulencia Atmosférica en la Degradación de Imágenes

En este primer capítulo realizaremos una descripción teórica de cada uno de los aspectos involucrados en el proceso de formación de imagen a través de la atmósfera terrestre. Empezaremos realizando una descripción de la estadística del índice de refracción de la atmósfera. Posteriormente ampliaremos esta descripción a la fase que adquiere un campo óptico al propagarse por la atmósfera. Presentaremos brevemente la teoría que describe los sistemas lineales invariantes al desplazamiento. Por último veremos como afecta la turbulencia atmosférica a la función de transferencia óptica del sistema.

1.1 Turbulencia Atmosférica

La atmósfera no es un medio estático, todo lo contrario está en un continuo devenir. La representación más común de su dinamismo son los vientos, masas de aire que se desplazan con velocidades variables. Cuando la velocidad del viento supera cierto umbral el movimiento de las masas de aire pasa de ser laminar a ser turbulento, ocasionándose así la aparición de remolinos de aire que se desplazan de forma aleatoria. Estos remolinos se suelen conocer por el nombre de bolsas de aire. Normalmente la turbulencia consiste en un conjunto de bolsas de aire de distintos tamaños. El número relativo de las distintas bolsas de aire de cada tamaño define el espectro de potencias de la turbulencia {1, 2, 3}.

El origen de las turbulencias atmosféricas se encuentra en el calentamiento y enfriamiento de la superficie terrestre. La energía calorífica acumulada por la superficie de la tierra se transfiere a las masas de aire que están en contacto con ella, aumentando así la temperatura de las mismas. Estas masas de aire caliente, que constituyen regiones con una temperatura característica, son las bolsas de aire de gran tamaño que ascienden por convección. Bajo la acción de los vientos estas bolsas de aire de gran tamaño se van disgregando en regiones más y más pequeñas dando lugar a bolsas de aire de menor tamaño. Así nos encontramos con una distribución de bolsas de aire aleatoria tanto en su distribución espacio temporal como en el número de ellas con un tamaño dado.

1.1.1 Estadística del índice de refracción

En el estudio de la propagación de campos ópticos por la atmósfera terrestre la magnitud relevante es el índice de refracción. El índice de refracción de la atmósfera se modeliza por la suma de un término que hace mención al valor medio del índice de refracción más un segundo término en el que se recoge el carácter aleatorio de sus variaciones {4, 5}:

$$n(\vec{r}, t) = n_0 + n_1(\vec{r}, t) \tag{1.1}$$

El valor medio del índice de refracción de la atmósfera es $n_0 \cong 1$ [4]. A longitudes de onda ópticas el índice de refracción del aire depende de la altura y de la presión por la relación [4, 6]:

$$n_1(t, r) = \left(\frac{77.6 \cdot P}{T} \cdot 10^{-6} \right) \tag{1.2}$$

donde T es la temperatura en Kelvin y P es la presión en milibares. Observamos que la fuente principal que origina las variaciones de índice son las fluctuaciones de temperatura.

Consideraremos que las fluctuaciones del índice de refracción constituyen un proceso homogéneo e isotrópico. La característica de homogeneidad va a permitir describir la autocorrelación de las fluctuaciones del índice de refracción en función de la separación \vec{r} entre los dos puntos de la región homogénea de los que estudiamos su correlación. La hipótesis de isotropía por otra parte indica que la autocorrelación depende de la distancia $r = |\vec{r}|$, que separa los puntos estudiados y no de su posición espacial en el interior de la región estudiada.

La función de estructura del índice de refracción $D_n(\vec{r}_1, r)$ se define como:

$$D_n(\vec{r}_1, r) = \left\langle [n(\vec{r}_1 + r) - n(\vec{r}_1)]^2 \right\rangle \tag{1.3}$$

donde $\langle \rangle$ indica promediado a las distintas realizaciones del índice de refracción. Recordamos aquí que la función de estructura depende de la distancia entre los dos puntos por ser el índice de refracción un medio localmente homogéneo e isótropo.

A partir de los estudios realizados por Kolmogorov sobre el valor cuadrático medio de la diferencia de velocidades existente entre dos puntos separados una distancia r en un medio localmente homogéneo e isótropo, Tatarskii y Corssin obtuvieron una

expresión para la función de estructura de las fluctuaciones del índice de refracción {7, 8}:

$$D_n = C_n^2 r^{\frac{2}{3}} \quad (1.4)$$

donde C_n^2 es una medida de la intensidad de la turbulencia. Esta forma de la función de estructura es válida cuando el valor de r es superior al tamaño mínimo que puede tener una bolsa de aire l_o , por debajo del cual los efectos de la viscosidad son relevantes, e inferior al tamaño máximo que pueden tener las bolsas de aire L_o , por encima del cual se viola el comportamiento isotrópico. Las bolsas de aire pequeñas constituyen la denominada “escala interior” o microescala de la turbulencia, mientras que las bolsas grandes constituyen la “escala exterior”.

Otra magnitud de gran valor, al igual que la función de estructura, al tratar de estudiar procesos aleatorios es la covarianza {9, 10}. En el caso de las fluctuaciones del índice de refracción la covarianza $\Gamma_n(\vec{r}_1, r)$ se define como:

$$\Gamma_n(\vec{r}_1, r) = \langle n_1(\vec{r}_1 + r) \cdot n_1(\vec{r}_1) \rangle \quad (1.5)$$

Relacionada con estas magnitudes a través de una transformada de Fourier tenemos la densidad espectral de potencia¹ $\Phi(\vec{\kappa})$:

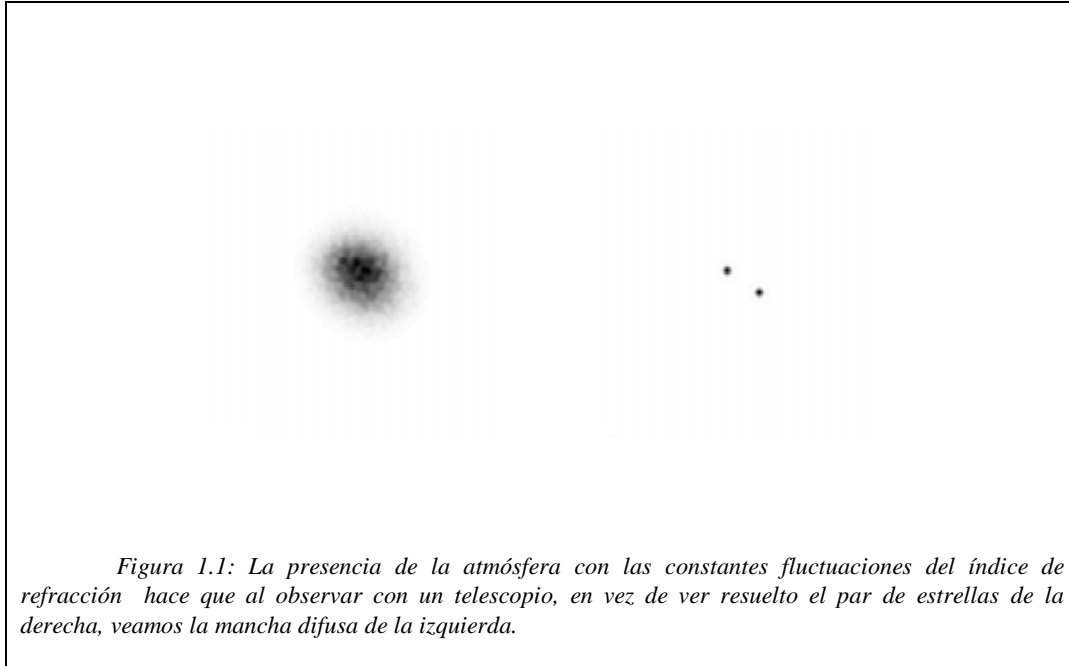
$$\Phi(\vec{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dr^3 \Gamma_n(r) \cdot \exp(-i\vec{\kappa}\vec{r}) \quad (1.6)$$

donde κ es la frecuencia espacial asociada a las variaciones del índice de refracción.

Utilizando la teoría expuesta propuesta por Kolmogorov para el rango inercial², trabajando en coordenadas esféricas y sacando fuera el promedio tenemos que {11}:

¹ Esta relación se conoce con el nombre de teorema de Wiener- Khinchin

² Rango inercial es el rango de valores de κ en el cual es aplicable la teoría de Kolmogorov. En este rango los efectos de la viscosidad no se notan, asimismo tampoco se genera energía cinética.



$$\Phi(\kappa) = \frac{5}{18\pi} C_n^2 \kappa^{-3} \int_{l_o}^{L_o} dr \cdot \sin(\kappa r) \cdot r^{-\frac{1}{3}} \quad (1.7)$$

Los distintos espectros de potencias que aparecen en la literatura, sean el de Kolmogorov, Tatarskii o von Karman, surgen todos de evaluar la integral de la expresión (1.7), pero con el matiz de que cada uno de los distintos espectros lleva implícito el uso de unos límites característicos en la evaluación de dicha integral {13}.

Así si permitimos que los límites de la integral diverjan de forma que $l_o \rightarrow 0$ y $L_o \rightarrow \infty$, la evaluación de la integral nos lleva al espectro de Kolmogorov {11}:

$$\Phi(k) = 0.033 \cdot C_n^2 \cdot \kappa^{-\frac{11}{3}} \quad (1.8)$$

Tatarskii describió un espectro que podía ser empleado en casos en los que se considerara la escala interna finita {11}:

$$\Phi(k) = 0.033 \cdot C_n^2 \cdot \kappa^{-\frac{11}{3}} \cdot \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\left(\frac{5.92}{l_o}\right)^2}\right) \quad (1.9)$$

Por otro lado von Karman propuso la obtención de un espectro para escalas externas finitas, obteniendo así otra expresión del espectro {11}:

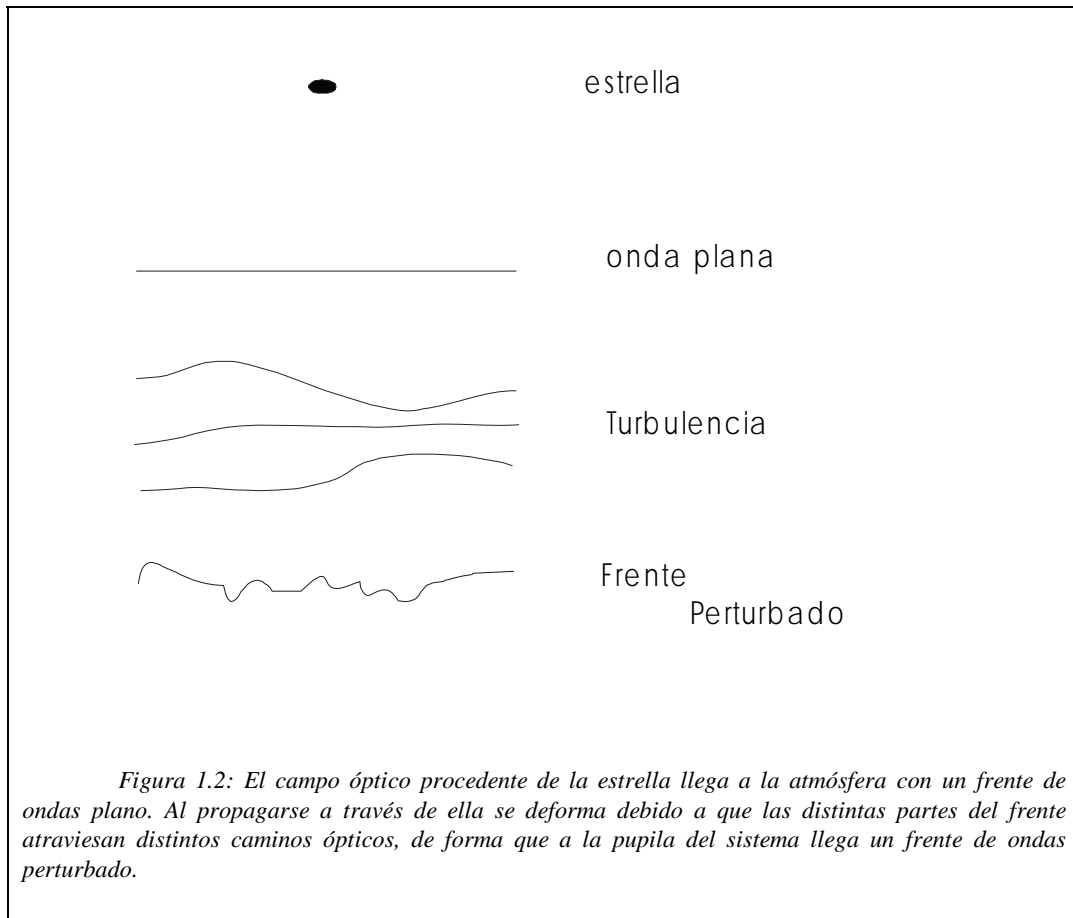
$$\Phi(k) = \frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\pi^{-\frac{9}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 8} \delta^2 L_o^3 \left(1 + \frac{\kappa^2}{\kappa_o^2}\right)^{-\frac{11}{6}} \quad (1.10)$$

donde:

$$\delta^2 = \frac{C_n^2}{1.9 L_o^{\frac{3}{2}}} \quad (1.11)$$

Recordar que cada uno de los espectros es válido en el rango: $\frac{2\pi}{L_o} \ll \kappa \ll \frac{2\pi}{l_o}$, {11}.

Durante el discurso desarrollado anteriormente hemos mencionado la constante de estructura del índice de refracción C_n^2 {12, 13, 14}. Esta constante de estructura caracteriza la intensidad de las fluctuaciones del índice de refracción. Se ha observado en las medidas realizadas de parámetros atmosféricos que la constante de estructura es una magnitud muy variable. Varía con la altura, la hora del día, las condiciones geográficas... En base a las distintas medidas realizadas para distintas condiciones existen diversos modelos matemáticos que intentan reflejar los resultados prácticos. Algunos de ellos son los modelos de Hufnagel-Valley, modelo SLC-Day, que se aplican a condiciones diurnas y los modelos de Greenwood y una versión modificada del de Hufnagel-Valley que se aplican a condiciones nocturnas. Las formas funcionales de estos modelos se pueden encontrar en la referencia {15}.



1.1.2 Descripción estadística de la fase

Las variaciones aleatorias del índice de refracción provocadas por las turbulencias atmosféricas hacen que los campos ópticos que se propagan a través de ellas acumulen fases aleatorias. Del mismo modo que caracterizamos las fluctuaciones del índice de refracción al determinar su covarianza y su función de estructura, deduciremos con el mismo fin estas mismas magnitudes para la fase que posee un campo óptico sobre la pupila de entrada del sistema.

Trabajaremos en el marco de la aproximación de campo cercano y modelo de capas. La aproximación de campo cercano establece que la turbulencia atmosférica es suficientemente débil y está suficientemente próxima a la pupila de entrada del sistema de tal forma que únicamente provoca retrasos entre las distintas partes del frente y no variaciones en la dirección de los rayos.

Por otra parte el modelo de capas establece que la atmósfera se puede descomponer en un conjunto de capas o regiones estadísticamente homogéneas, cada una de las cuales está caracterizada por una constante de estructura característica que es función de la altura a la que se encuentra la capa, e independientes estadísticamente entre sí. Este modelo tiene la ventaja de que permite estudiar por separado la estadística de cada capa y posteriormente obtener la estadística global sin más que multiplicar los resultados parciales obtenidos. Así por ejemplo podemos determinar la función de correlación para cada una de las capas $\Gamma_{u_i}(\Delta\vec{x})$ y posteriormente determinar la función de correlación Γ_u global de la atmósfera {16}:

$$\Gamma_u(\Delta\vec{x}) = \prod_{i=1}^N \Gamma_{u_i}(\Delta\vec{x}) \quad (1.12)$$

Consideramos ahora una onda plana propagándose por un medio turbulento. La perturbación de fase acumulada en una región de espesor Δz es :

$$\psi_i(\vec{x}) = \int_{z_i}^{z_i + \Delta z} n_1(\vec{x}, z) dz \quad (1.13)$$

Así una onda plana de entrada al salir de la región adquirió la forma:

$$u_f(\vec{x}, z_i) = \exp(j\psi_i(\vec{x})) \quad (1.14)$$

La función de correlación espacial del campo viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} \Gamma_{u_i}(\Delta\vec{x}) &= \langle u_f(\vec{x}) \cdot u_f(\vec{x} - \Delta\vec{x}) \rangle = \\ &= \left\langle \exp \left(jk \int_{z_i}^{z_i + \Delta z_i} dz [n_1(\vec{x}, z) - n_1(\vec{x} - \Delta\vec{x}, z)] \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de ondas.

Para poder continuar con el desarrollo de las expresiones es necesario realizar una suposición sobre la estadística de las fluctuaciones del índice de refracción. Consideraremos pues que las fluctuaciones del índice de refracción constituyen un fenómeno aleatorio que sigue una distribución gaussiana y cuyo valor medio será nulo. Estas suposiciones permiten desembocar en una expresión mucho más sencilla para la función de correlación espacial del campo {17}.

$$\Gamma_{u_i}(\Delta\vec{x}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_{\psi_i}(\Delta\vec{x}) \right\} \quad (1.16)$$

donde $D_{\psi_i}(\Delta\vec{x})$ es la función de estructura de fase:

$$\begin{aligned} D_{\psi_i}(\Delta\vec{x}) &= \langle [\psi_i(\vec{x}) - \psi_i(\vec{x} - \Delta\vec{x})]^2 \rangle = \\ &= k^2 \left\langle \int_{z_i}^{z_i + \Delta z_i} dz [n_1(\vec{x}, z) - n_1(\vec{x} - \Delta\vec{x}, z)]^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (1.17)$$

Trabajaremos con el espectro de potencias propuesto por Kolmogorov. En estas condiciones la función de estructura de fase toma la forma {18}:

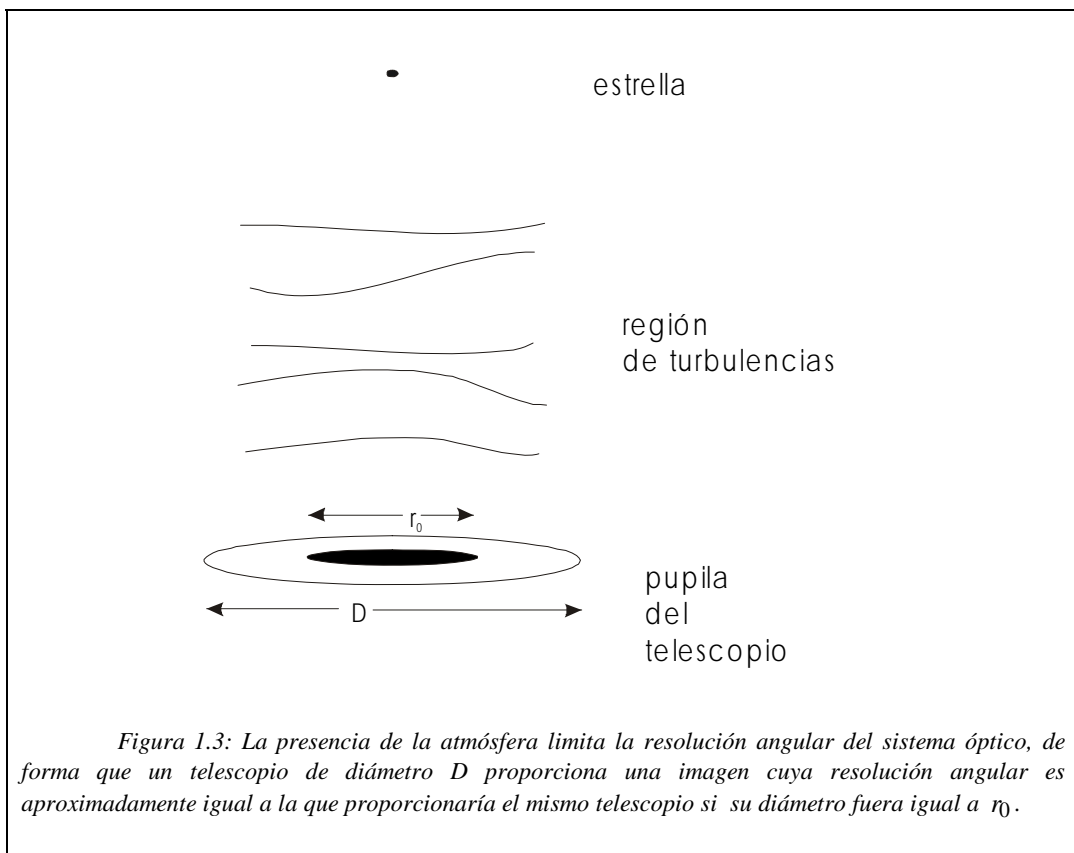
$$D_{\psi_i}(\Delta\vec{x}) = 2.91 k^2 \Delta z_i C_{n_i}^2 |\Delta\vec{x}|^{\frac{5}{3}} \quad (1.18)$$

Comparando esta expresión con la propuesta por Fried {19} obtenemos la siguiente expresión para el parámetro atmosférico r_0 :

$$r_{0_i} = 0.185 \left[\frac{4\pi^2}{k^2 C_{n_i}^2 \Delta z_i} \right]^{\frac{5}{3}} \quad (1.19)$$

donde r_{0_i} se conoce como el parámetro de Fried para la i -ésima capa. Con la utilización de este parámetro la expresión de la función de estructura de fase de la i -ésima capa se hace mucho más sencilla:

$$D_{\psi_i}(\Delta \vec{x}) = 6.88 \left(\frac{|\Delta \vec{x}|}{r_{0_i}} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (1.20)$$



Una vez determinada la forma de la función de estructura de fase de la i -ésima capa estamos en condiciones de obtener la función de estructura de campo. Sustituyendo la expresión (1.18) en (1.16) y esta en (1.12) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_u(\Delta\vec{x}) &= \prod_{i=1}^N \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot 2.91k^2 \Delta z_i C_{n_i}^2 |\Delta\vec{x}|^{\frac{5}{3}}\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot 2.91k^2 |\Delta\vec{x}|^{\frac{5}{3}} \sum_{i=1}^N \Delta z_i C_{n_i}^2\right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

De esta expresión podemos obtener una nueva definición para el parámetro de Fried. Esta nueva definición se interpreta considerando r_0 como el parámetro de Fried tras contemplar todas las capas involucradas en la propagación del campo.

$$r_0 = 0.185 \left[\frac{4\pi^2}{k^2 \sum_{i=1}^N C_{n_i}^2 \Delta z_i} \right]^{\frac{3}{5}} \quad (1.22)$$

Es importante recordar que todos los resultados han sido obtenidos bajo la hipótesis de campo cercano, lo que indica que la turbulencia se puede considerar próxima a la pupila del sistema de tal forma que sólo se producen retrasos en el frente de onda y no variaciones en la dirección de los rayos incidentes.

Hasta ahora hemos analizado el caso particular en el que trabajamos bajo la hipótesis de campo cercano e iluminación plana. Pero en el caso en el que queramos realizar observaciones en el interior de la atmósfera una onda inicial esférica representará con más acierto la situación real. En el caso de que la onda de referencia sea esférica la función de estructura viene dada por la expresión {20}.

$$D(r) = 2.91k^2 r^{\frac{5}{3}} \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{5}{3}} C_n^2(z) dz \quad (1.23)$$

donde L es la distancia a la que está la fuente del plano de observación y $r = \Delta\bar{x}$ es la distancia existente entre los puntos que correlacionamos. Sin más que redefinir r_0 podemos recuperar formalmente la expresión de la función de estructura obtenida para una onda plana.

$$r_0 = 0.185 \left[\frac{4\pi^2}{k^2 \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{5}{3}} C_n^2(z) dz} \right]^{\frac{3}{5}} \quad (1.24)$$

La obtención de la expresión (1.23) viene totalmente detallada en la referencia {21}. Observando dicha expresión comprobamos que la única diferencia entre la función de estructura obtenida para una onda plana y una onda esférica se encuentra en el factor $\left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{5}{3}}$. Para recuperar la expresión (1.18) a partir de (1.23) basta con justificar que dicho factor sea igual a 1. Así cogemos la expresión (1.23) y hacemos tender L a infinito. De esta forma estaremos calculando la función de estructura desde 0 hasta infinito. Cuando z tienda a infinito el factor $\left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{5}{3}}$ tenderá a uno.

Hasta ahora hemos analizado los efectos de la turbulencia atmosférica sobre un campo óptico que se propaga por ella bajo la hipótesis de campo cercano. Esta hipótesis permite considerar que las perturbaciones producidas por la turbulencia atmosférica son sólo perturbaciones de fase. Esto provoca que la función de estructura de campo se pueda representar directamente por la función de estructura de fase $D_\psi(\Delta\bar{x})$. Si la hipótesis de campo cercano no se confirma entonces la perturbación en el plano de la pupila consiste por lo general en perturbaciones tanto de fase como de amplitud {22, 23, 19}.

Como hemos visto en el marco de la aproximación de campo cercano obtuvimos que la función de correlación del campo $\Gamma_u(\Delta\bar{x})$ se expresa por:

$$\Gamma_u(\Delta\bar{x}) = \exp\left(-\frac{1}{2}D(\Delta\bar{x})\right) \quad (1.25)$$

donde $D(\Delta\bar{x})$ se interpreta ahora como la función de estructura del campo. La función de estructura del campo es una combinación de la función de estructura de fase y de la función de estructura de amplitud logarítmica {24}. La perturbación de fase la seguiremos denotando por $\psi(\bar{x})$ mientras que la perturbación de amplitud logarítmica la denotaremos por $\chi(\bar{x})$. Así el campo perturbado $u(\bar{x})$ en la pupila del sistema puede ser descrito por:

$$u(\bar{x}) = \exp\{\chi(\bar{x})\} \exp\{j\psi(\bar{x})\} \quad (1.26)$$

A partir de esta expresión llevando a cabo la misma deducción que realizamos para obtener la expresión de la función de estructura de fase, obtendremos la expresión de la función de estructura de campo {24}:

$$\begin{aligned} D(\Delta\bar{x}) &= \left\langle (\chi(\Delta\bar{x}) - \chi(\bar{x} + \Delta\bar{x}))^2 \right\rangle + \left\langle (\psi(\Delta\bar{x}) - \psi(\bar{x} + \Delta\bar{x}))^2 \right\rangle = \\ &= D_\chi(\Delta\bar{x}) + D_\psi(\Delta\bar{x}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde $D_\psi(\Delta\bar{x})$ es la función de estructura de fase y $D_\chi(\Delta\bar{x})$ es la función de estructura de la amplitud logarítmica.

Al analizar los efectos de la turbulencia atmosférica es útil expresar la perturbación de fase $\psi(\bar{x})$ como una combinación lineal de funciones base ortogonales {25}. El expandir la fase de esta forma nos va a permitir obtener un mayor conocimiento de la estructura de los efectos de la turbulencia. También facilitará la realización de simulaciones así como la compensación selectiva de la distorsión del frente de ondas.

Expresamos la perturbación de fase como una combinación lineal de unas funciones base Ω_i :

$$\psi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N a_i \Omega_i(\bar{x}) \quad (1.28)$$

donde los a_i son los coeficientes de la expansión modal. El valor de cada a_i vendrá dado por la proyección de la perturbación de fase sobre la autofunción correspondiente:

$$a_i = \int_{-\infty}^{+\infty} dx^2 \psi(\bar{x}) \Omega_i(\bar{x}) \quad (1.29)$$

Debido al carácter aleatorio de la perturbación de la fase inducida por las turbulencias atmosféricas los coeficientes empleados en el desarrollo en serie van a tener carácter aleatorio, con un valor medio y una covarianza característica. Vamos a considerar que los coeficientes modales siguen una distribución de probabilidad gaussiana y además que el valor medio de cada coeficiente es cero {25}. Por otra parte la covarianza de los coeficientes vendrá dada por la definición {25}:

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\bar{x}) \Omega_i(\bar{x}) dx^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\bar{x}') \Omega_j(\bar{x}') dx'^2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^2 \Omega_i \Omega_j \langle \psi(\bar{x}) \psi(\bar{x}') \rangle \end{aligned} \quad (1.30)$$

Para poder profundizar en el conocimiento de la fase tenemos que determinar cuales van a ser las funciones base que vamos a emplear. Por sus propiedades matemáticas y su uso tan extendido en el campo de la óptica trabajaremos con los bien conocidos polinomios de Zernike.

Las principales propiedades de los polinomios de Zernike son: forman una base ortogonal de polinomios dentro del círculo de radio unidad; pueden ser escritos en coordenadas polares como una función separable en ángulo y radio. Existen diversas definiciones de los polinomios de Zernike. Nosotros emplearemos en nuestro trabajo la definición realizada por Roddier y Noll {26, 27}. Debido a la importancia de los polinomios de Zernike tanto en el trabajo que estamos desarrollando como en el campo de la óptica mostramos a continuación su definición analítica:

$$\begin{aligned}
 Z(r, \phi)_{j_{\text{impar}}} &= \sqrt{n+1} \cdot R_n^m(r) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(m\phi) & m \neq 0 \\
 Z(r, \phi)_{j_{\text{par}}} &= \sqrt{n+1} \cdot R_n^m(r) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(m\phi) & m \neq 0 \\
 Z(r, \phi) &= \sqrt{n+1} \cdot R_n^0(r) & m = 0
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{(n-m)}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[\frac{(n-m)}{2} - s \right]! \left[\frac{(n+m)}{2} - s \right]!} r^{n-2s}$$

Recordamos que los polinomios están normalizados de tal forma que el valor cuadrático medio de cada polinomio en el círculo de radio unidad sea 1. Con la elección de los polinomios de Zernike como funciones base, el desarrollo en serie de la perturbación de fase $\psi(\bar{x})$ toma la forma:

$$\psi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N a_i Z_i(\bar{x}) \tag{1.32}$$

Del mismo modo ahora ya podemos calcular la covarianza de los coeficientes modales a_i . La expresión de la covarianza de los coeficientes fue obtenida por Noll, para el caso de turbulencias atmosféricas descritas por el espectro de potencias de Kolmogorov {27}.

$$\begin{aligned}
 \langle a_i a_j \rangle &= 0.0072 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} (-1)^{\frac{(n+n'-2m)}{2}} [(n+1) \cdot (n'+1)]^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{8}{3}} \delta_{mm'} \cdot \\
 &\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+n'-\frac{5}{3}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-n'+\frac{17}{3}}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n'-n+\frac{17}{3}}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+n'+\frac{23}{3}}{2}\right)}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

el factor $\delta_{mm'}$ es la delta de Kronecker y establece que la covarianza de los coeficientes es no nula sólo en los casos en los que la resta $i-j$ sea par, donde i, j son los índices de los

coeficientes modales, D es el diámetro del círculo sobre el cual definimos los polinomios de Zernike y Γ es la función gamma.

A pesar de haber considerado los coeficientes modales como variables aleatorias gaussianas y haber usado unas funciones base que a priori parecían adecuadas para el problema, se comprueba que los coeficientes modales obtenidos a partir del conjunto de funciones base escogidas están correlacionados {26}. Cabe pues buscar nuevas funciones base que permitan que la matriz de covarianza de los coeficientes modales sea diagonal. Las funciones base que garantizan esta condición son los polinomios de Karhunen-Loève {28, 29}.

El manejo de los polinomios de Karhunen-Loève tiene el problema de que carecen de una forma analítica conocida. Por ello se sugirió la posibilidad de descomponer los polinomios de Karhunen-Loève en una serie de polinomios ortogonales {26}. Se vio experimentalmente que los polinomios de Zernike de orden bajo se parecían bastante a los Karhunen-Loève {30}. Este hecho contribuyó a que se decidiese usar los polinomios de Zernike como base para describir los polinomios de Karhunen-Loève mediante combinaciones lineales del tipo {30,26}.

$$K_i(r) = \sum_{i=2}^N b_i Z_i(r) \quad (1.34)$$

Más adelante, con motivo de mostrar como diseñar una pantalla de fase que siga la estadística atmosférica describiremos uno de los posibles métodos que permiten descomponer los polinomios de Karhunen-Loève en función de los polinomios de Zernike.

Una vez descrita la perturbación atmosférica y su estadística estableceremos la influencia de ésta en el proceso de formación de imagen. Primero realizaremos una breve exposición que explique el proceso de formación de imagen, definiendo las magnitudes necesarias para poder ampliar posteriormente la explicación al caso de la formación de imagen a través de la turbulencia atmosférica. Veremos tanto cuantitativa como

cualitativamente, mediante la presentación de unos ejemplos. que la presencia de la atmósfera establece una limitación en la resolución de los sistemas ópticos.

1.2 Formación de la imagen

Las técnicas de Fourier ofrecen un marco de trabajo particularmente elegante a partir del cual se puede desarrollar una descripción sencilla del proceso de formación de imágenes. Un punto clave en el análisis es el concepto de sistema lineal {31, 32}. Supongamos entonces que una señal de entrada $f(\vec{x})$ pasando a través de un sistema óptico resulta en una salida $g(\vec{x})$. El sistema es lineal si:

- multiplicando $f(\vec{x})$ por una constante a produce una salida $a \cdot f(\vec{x})$
- cuando la entrada es una suma de dos funciones ponderadas $a \cdot f_1(\vec{x}) + b \cdot f_2(\vec{x})$

la salida será $a \cdot g_1(\vec{x}) + b \cdot g_2(\vec{x})$

Los sistemas lineales admiten una descripción elegante de su funcionamiento en términos de la función respuesta de impulso (PSF). Consideramos un sistema S que transforma funciones $f(\vec{x}_1)$ en el plano Π_1 en funciones $g(\vec{x}_2)$ en el plano Π_2 .

$$S(f(\vec{x}_1)) = g(\vec{x}_2) \quad (1.35)$$

La propiedad de la función δ de Dirac nos permite escribir $f(\vec{x}_1)$ como una suma de deltas:

$$f(x_1, y_1) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \quad (1.36)$$

Así siendo el sistema lineal, podemos aplicar el principio de superposición, que permite considerar la entrada como compuesta por un conjunto de fuentes puntuales ponderadas cada una por su factor correspondiente llegando a la expresión:

$$\begin{aligned}
 g(x_2, y_2) &= S \left(\int \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \right) = \\
 &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) S[\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)] d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

La función $h(x_2, y_2; \xi, \eta) = S[\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)]$ se denomina respuesta de impulso del sistema. Si el sistema además de ser lineal es invariante al desplazamiento, la respuesta de impulso del sistema no depende de los valores absolutos de las coordenadas de entrada y salida, sino solamente de su diferencia {30}

$$h(x_2, y_2; x_1, y_1) = h(x_2 - x_1; y_2 - y_1) \tag{1.38}$$

puediéndose expresar la salida de la siguiente forma

$$g(x_2, y_2) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y_1) h(x_2 - x_1; y_2 - y_1) dx_1 dy_1 \tag{1.39}$$

Observando la expresión encontramos que la salida producida por el sistema es la convolución de la entrada del sistema con la respuesta de impulso del mismo.

Un sistema óptico formador de imagen suele estar constituido por una lente o conjunto de lentes. La propiedad más familiar de las lentes es su habilidad para formar imágenes. Si un objeto se coloca delante de una lente y se ilumina, bajo ciertas circunstancias aparecerá en otro plano una distribución de luz que recuerda mucho al objeto. Esta distribución de intensidad se llama imagen.

Representamos el campo complejo inmediatamente detrás del objeto por $U_0(x_0, y_0)$. A una distancia d_i detrás de la lente aparecerá una distribución de campo que representaremos por $U_i(x_i, y_i)$. En base a la linealidad del fenómeno de propagación podemos expresar el campo $U_i(x_i, y_i)$ mediante una integral de superposición {33}:

$$U_i(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_i, y_i; x_o, y_o) U_o(x_o, y_o) dx_o dy_o \tag{1.40}$$

donde $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$ es la amplitud del campo producida en las coordenadas (x_i, y_i) por una fuente puntual de amplitud unidad situada en las coordenadas objeto (x_o, y_o) . De forma adicional consideraremos que el sistema es invariante espacial, con lo que la integral de superposición se convierte en una integral de convolución {34}:

$$U_i(x_i, y_i) = h(x_i, y_i) * U_g(x_i, y_i) \quad (1.41)$$

donde $U_g(x_i, y_i)$ es la imagen geométrica.

Vamos a tratar de encontrar la expresión de $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$. Para ello consideraremos que el objeto es una fuente puntual situada en las coordenadas (x_o, y_o) . Empleando la ecuación de difracción de Fresnel obtenemos la expresión de la respuesta de impulso, de un sistema formado por una lente e iluminación coherente {34}:

$$h(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y) \exp\{-j2\pi(x_i f_x + y_i f_y)\} df_x df_y \quad (1.42)$$

donde $P(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y)$ es la función pupila, que se define:

$$P(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y) = \begin{cases} 1 & \text{dentro de la lente} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \quad (1.43)$$

La función de transferencia de un sistema se define como la transformada de Fourier de la respuesta de impulso. Así para el caso examinado, la función de transferencia coherente (CTF) vendrá dada por {35}:

$$H_c(f_x, f_y) = P(\lambda d_i f_x, \lambda d_i f_y) \quad (1.44)$$

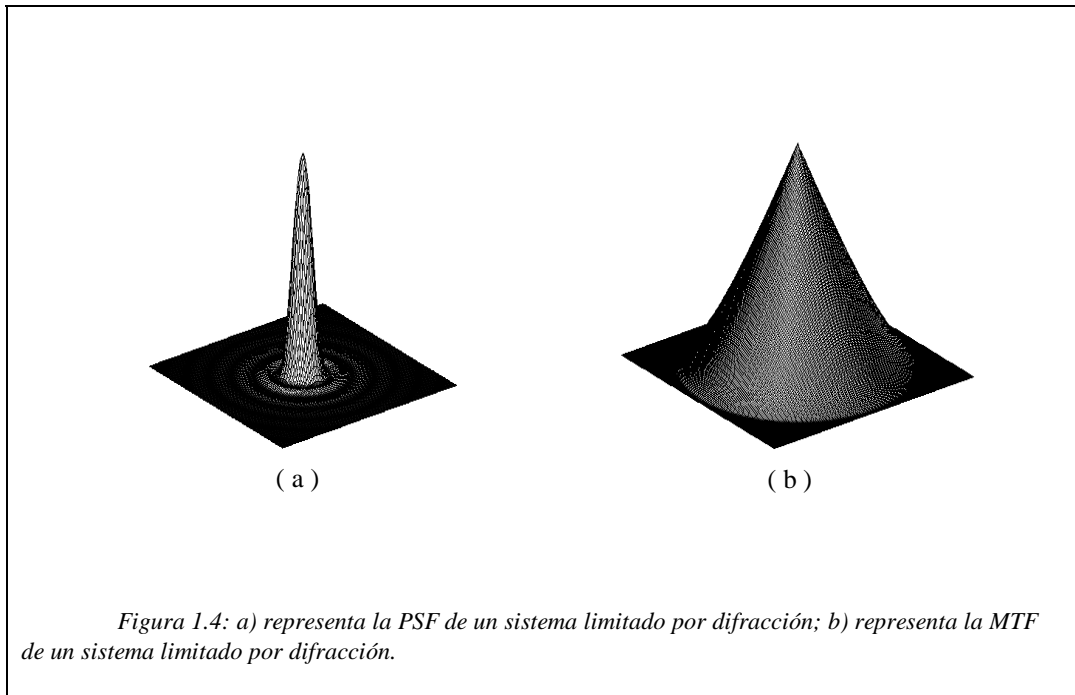
vemos que la CTF coincide con la función pupila del sistema en coordenadas escaladas $\bar{x} = \lambda d_i \bar{f}$.

Una vez hemos obtenido la respuesta de impulso y la CTF de un sistema que emplea luz coherente nos será más sencillo encontrar la expresión de estas magnitudes para un sistema incoherente. El comportamiento de un sistema que use iluminación incoherente obedece a la siguiente integral de convolución {36}:

$$I_i(x_i, y_i) = k \int \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x_i - x', y_i - y')|^2 I_g(x', y') dx' dy' \quad (1.45)$$

Observando la expresión (1.45) encontramos la definición de la respuesta de impulso de un sistema incoherente:

$$PSF = |h(x_i, y_i)|^2 \quad (1.46)$$



Aplicando el teorema de la convolución a la expresión (1.45) llegamos a la siguiente relación en el espacio de las frecuencias:

$$\tilde{I}_i(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) \tilde{O}_g(f_x, f_y) \quad (1.47)$$

donde $\tilde{I}_i(f_x, f_y)$ es el espectro de la imagen, $\tilde{O}_g(f_x, f_y)$ es el espectro de la imagen geométrica y $H(f_x, f_y)$ es la función de transferencia óptica del sistema. La OTF se calcula mediante la transformada de Fourier normalizada de la PSF {37}:

$$H(f_x, f_y) = \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x_i, y_i)|^2 \exp\{-j2\pi(x_i f_x + y_i f_y)\} dx_i dy_i}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i} \quad (1.48)$$

La OTF se normaliza de forma que aseguramos que la potencia total en el plano imagen es igual a la potencia total del plano objeto. El módulo de la OTF se conoce como función de transferencia de modulación (MTF).

Comparando las definiciones de la OTF de un sistema incoherente con la CTF de un sistema coherente nos damos cuenta de que se pueden relacionar mediante la expresión {38}:

$$H(f_x, f_y) = \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} H_c(f_x, f_y) H_c^*(f_x - \xi, f_y - \eta) d\xi d\eta}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |H_c(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta} \quad (1.49)$$

Vemos así que la función de transferencia óptica de un sistema iluminado con luz incoherente es la autocorrelación de la función de transferencia óptica del sistema iluminado con luz coherente. Introduciendo (1.44) en (1.49) llegamos a la expresión de la OTF para un sistema incoherente:

$$H(f_x, f_y) = \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} P(f_x, f_y) P^*(f_x - \xi, f_y - \eta) d\xi d\eta}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |P(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta} \quad (1.50)$$

En base a la expresión (1.50) podemos decir que la función de transferencia de un sistema incoherente es la autocorrelación normalizada de la pupila del sistema.

Cuando existen aberraciones en el frente de ondas, podemos pensar que la pupila del sistema está siendo iluminada con una onda ideal esférica que converge al plano imagen geométrico y que existe una pantalla de fase sobre la pupila que deforma el frente de ondas. Si el error en la fase en el punto (x, y) se representa por $kW(x, y)$ donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y W es el error efectivo en la longitud de camino óptico. La función pupila generalizada adquirirá la forma {39}:

$$\tilde{P}(x, y) = P(x, y) \exp\{jkW(x, y)\} \quad (1.51)$$

Este formalismo lo emplearemos a la hora de estudiar los efectos de las turbulencias atmosféricas en el proceso de formación de imágenes.

En los párrafos anteriores hemos pasado por alto el carácter aleatorio del campo óptico, para mantener así un discurso más continuo y fácil de entender. Creemos sin embargo que sería de interés para el desarrollo de apartados posteriores el realizar una descripción del proceso de formación de imágenes desde un punto de vista que involucre la coherencia espacial del campo {40}. Las propiedades de coherencia espacial del campo se pueden expresar matemáticamente mediante la función de correlación. Definimos la función de correlación espacial del campo en el plano objeto como:

$$\Gamma_{u_o}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \langle u_o(\bar{x}_1) u_o^*(\bar{x}_2) \rangle \quad (1.52)$$

En el caso de iluminación incoherente el campo es una magnitud aleatoria. Al igual que con otros procesos aleatorios es deseable pensar en términos estadísticos en vez

de fijarse en eventos individuales. Así trabajaremos con la irradiancia promedio observada en el plano imagen {42}:

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{x}_i) \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_2 u_o(\bar{x}_1) u_o^*(\bar{x}_2) h_i(\bar{x}_i - \bar{x}_1) h_i^*(\bar{x}_i - \bar{x}_2) \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_2 \langle u_o(\bar{x}_1) u_o^*(\bar{x}_2) \rangle h_i(\bar{x}_i - \bar{x}_1) h_i^*(\bar{x}_i - \bar{x}_2) \end{aligned} \quad (1.53)$$

En la expresión anterior $h_i(\bar{x} - \bar{x}_j)$ es la respuesta de impulso del sistema, considerando como tal todo el espacio existente entre los planos objeto e imagen. Para hacer un análisis del proceso de formación de imagen desde un punto de vista interferométrico nos interesa más descomponer el sistema en dos partes, una que va del plano objeto a la pupila del sistema, y otra que va desde la pupila hasta el plano imagen. Así definiremos $u_p(\bar{x})$ como el campo existente sobre la pupila del sistema y que se obtiene de convolucionar el campo objeto con la respuesta de impulso correspondiente a la propagación del campo desde el plano objeto a la pupila. De esta forma podremos describir la irradiancia promedio en el plano imagen como:

$$\langle I(\bar{x}_i) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_2 \langle u_p(\bar{x}_1) u_p^*(\bar{x}_2) \rangle h_{p_i}(\bar{x}_i - \bar{x}_1) h_{p_i}^*(\bar{x}_i - \bar{x}_2) \quad (1.54)$$

donde $h_{p_i}(\bar{x}_i)$ es la respuesta de impulso correspondiente a la pupila y propagación hasta el plano imagen.

Realizando una transformación de Fourier sobre la expresión (1.54), e integrando en la variable \bar{x}_2 obtenemos:

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_p(\bar{x}_1, \bar{x}_1 - \lambda d_i \vec{f}) P(\bar{x}_1) P^*(\bar{x}_1 - \lambda d_i \vec{f}) d\bar{x}_1 \quad (1.55)$$

donde $\Gamma_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ representa la correlación espacial del campo sobre la pupila del sistema.

Empleando el modelo desarrollado para iluminación incoherente, la expresión de la función de correlación de campo queda de la forma {45}:

$$\Gamma_{u_o}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = k \langle O(\vec{x}_1) \rangle \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (1.56)$$

En base al teorema de Van Cittert-Zernike³ que establece que la función de correlación del campo incidente sobre la pupila del sistema para el caso de objeto incoherente depende sólo de la separación de los puntos que correlacionamos, podemos sacar fuera de la integral de la expresión (1.55) la función de correlación espacial del campo sobre la pupila y llegar a la siguiente expresión {46}:

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \Gamma_p(\lambda d_i \vec{f}) \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{x}) P^*(\vec{x} - \lambda d_i \vec{f}) d\vec{x} \quad (1.57)$$

Desde un punto de vista interferométrico, a la luz de la expresión del espectro de la imagen, podemos decir que cada componente de frecuencia de la imagen $\tilde{I}(\vec{f})$ es fruto de la suma de los distintos patrones de interferencia generados por todos los pares de puntos pertenecientes a la pupila del sistema separados una distancia $\Delta\vec{x} = \lambda d_i \vec{f}$, pesados por la función de transferencia óptica del sistema. Cada componente de frecuencia de la imagen se traduce en una distribución sinusoidal en el plano imagen. De esta forma se puede interpretar que la imagen final es el resultado de la suma de los distintos patrones sinusoidales. Si la lente involucrada en el proceso de formación de imagen no tiene aberraciones, la suma de las distintas componentes del espectro se sumarán con la fase correcta, dando lugar a una imagen adecuada del objeto. En caso contrario, en presencia de aberraciones, las componentes espectrales se sumarán con una fase errónea que originará una imagen inadecuada del objeto.

1.3 Efectos de la turbulencia atmosférica sobre la formación de imagen

Una forma sencilla de ver los efectos de la turbulencia atmosférica sobre la formación de imagen es a partir de la correlación del campo óptico sobre la pupila del sistema, tras haber atravesado la atmósfera {47}.

$$\Gamma_p(\Delta\vec{x}') = \Gamma_{u_o}(\Delta\vec{x}')\Gamma_s(\Delta\vec{x}') \quad (1.58)$$

donde $\Gamma_s(\Delta\vec{x}')$ es la función de correlación espacial de la perturbación del campo producida por la atmósfera sobre la pupila del sistema, $\Gamma_{u_o}(\Delta\vec{x}')$ es la correlación espacial del campo en ausencia de perturbación atmosférica sobre la pupila del sistema y $\Gamma_p(\Delta\vec{x}')$ es la correlación del campo en la pupila del sistema y el subíndice p da idea de que estamos sobre la pupila del sistema. Al establecer la correlación del campo en la pupila como un producto hemos supuesto que las fluctuaciones intrínsecas del campo incidente y las fluctuaciones del frente producidas por la atmósfera no están correlacionadas. Debido a la separabilidad de estos procesos aleatorios, se puede realizar un análisis de la correlación del campo en la pupila del sistema que considere por un lado la contribución de la correlación espacial del campo en ausencia de perturbación y por otro la contribución de la correlación espacial de la turbulencia atmosférica.

La turbulencia atmosférica altera la coherencia del campo en la pupila del sistema. Toda la perturbación de fase, o aberración, que acumuló la onda que se propaga a través de la atmósfera se puede simular como una pantalla de fase situada en la pupila del sistema. Si la perturbación inducida por la atmósfera fuera fija, con situar una pantalla de fase rígida sobre la pupila se podría simular y compensar el efecto de la atmósfera. Pero la atmósfera está sometida a un movimiento turbulento de tal forma que la perturbación introducida en el campo varía temporal y espacialmente siguiendo una cierta estadística. Así si queremos reducir la atmósfera a una pantalla de fase, esta deberá

³ Ver Referencias {43, 44}.

ser una pantalla variable que siga la misma estadística que la atmósfera. Este discurso presenta la base conceptual del modelo de la *pantalla de fase* {48}. Este modelo rompe el problema de la formación de imagen en dos bloques diferenciados: 1) caracterización de la perturbación en la pupila; 2) formación de la imagen. La caracterización de la perturbación ya la hemos realizado en el apartado 1.1. Por lo tanto nos encargaremos de estudiar la formación de la imagen en este apartado.

Empleando el modelo de *pantalla de fase* el campo existente sobre la pupila del sistema se representa mediante el producto del campo incidente por la función pupila generalizada del sistema.

$$u_p(\vec{x}) = u_i(\vec{x})\tilde{P}(\vec{x}) \quad (1.59)$$

La función de correlación espacial del campo incidente sobre la pupila se expresa por:

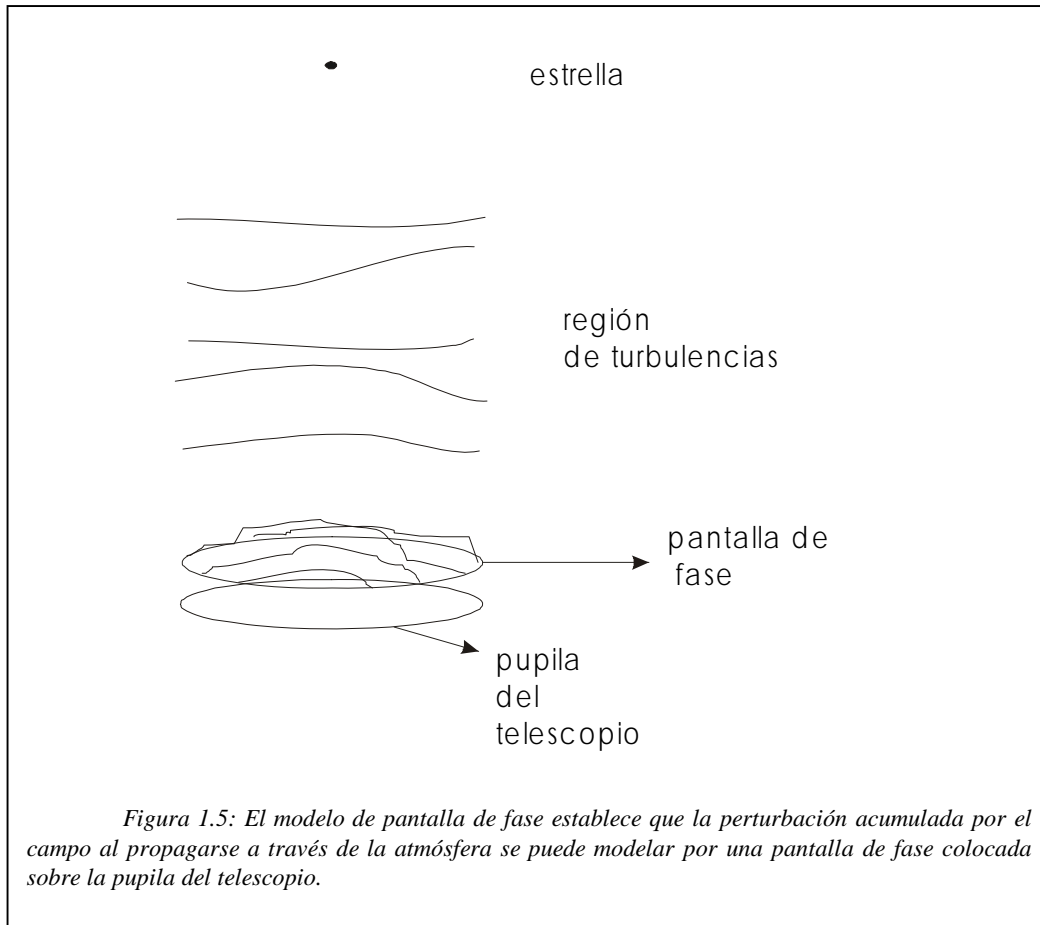
$$\Gamma_p(\Delta\vec{x}) = \Gamma_i(\Delta\vec{x})\Gamma_s(\Delta\vec{x}) \quad (1.60)$$

donde $\Gamma_p(\Delta\vec{x})$ es la función de correlación espacial del campo sobre la pupila del sistema, $\Gamma_i(\Delta\vec{x})$ es la función de correlación espacial del campo incidente en ausencia de perturbación y $\Gamma_s(\Delta\vec{x})$ es la función de correlación espacial de la perturbación de fase.

Para el estudio de la formación de imágenes es interesante recordar como evoluciona la función de correlación con la distancia respecto a la fuente. El teorema de van Cittert-Zernike establece que en el caso de propagación libre en un medio homogéneo la función de correlación del campo a una distancia z será:

$$\Gamma_p(\Delta\vec{x}, z) = \Gamma_p(\Delta\vec{x}) * |h_d(\Delta\vec{x})|^2 \quad (1.61)$$

donde $h_d(\Delta\vec{x})$ depende de z y representa la respuesta de impulso correspondiente a la propagación del campo óptico {49}.



En el estudio de la formación de imágenes a través de la atmósfera cabe estudiar dos procesos distintos. El primero será la formación de imágenes de larga exposición. Esto quiere decir que el tiempo de exposición es mucho mayor que el tiempo de cambio característico de las fluctuaciones de la atmósfera. Así durante la exposición la función de transferencia de la atmósfera va tomar distintas realizaciones. El segundo será la formación de imágenes de corta exposición. Todo lo contrario que en el primer caso, se intenta tomar fotos en un tiempo mucho menor que el de cambio de la atmósfera evitando así el promediado asociado a la larga exposición.

1.3.1 OTF de larga exposición

Cuando realizamos fotos de larga exposición a través de la atmósfera estamos permitiendo que la función de transferencia óptica de la atmósfera tome distintas realizaciones. Esto da lugar a un promediado de imágenes formadas a partir de un mismo objeto y distintas OTF. Considerando que el campo incidente y la perturbación atmosférica que atraviesa no están correlacionados podemos expresar la función de correlación del campo en la pupila del sistema como la combinación de las propiedades de coherencia del campo incidente y de la perturbación. Sustituyendo la expresión (1.60) en (1.57) llegamos a que el espectro de la imagen se representa por {50}:

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \Gamma_i(\lambda d_i \vec{f}) \Gamma_s(\lambda d_i \vec{f}) \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{x}) P^*(\vec{x} - \lambda d_i \vec{f}) d\vec{x} \quad (1.62)$$

donde $\Gamma_i(\lambda d_i \vec{f})$ es la función de correlación del campo, que da idea de la coherencia espacial del campo en ausencia de perturbación sobre la pupila, $\Gamma_s(\lambda d_i \vec{f})$ es la función de correlación de la perturbación del campo que también informa sobre la coherencia espacial de la perturbación del campo debido a la propagación a través de la atmósfera sobre la pupila, y $P(\vec{x})$ es la función pupila.

Según el teorema de van Cittert-Zernike la correlación del campo incidente $\Gamma_i(\lambda d_i \vec{f})$, es la transformada de Fourier $\tilde{O}(\vec{f})$, de la distribución de irradiancia del objeto en el plano imagen. Así podemos escribir a partir de la expresión (1.62) el espectro de la imagen en función del espectro de la imagen geométrica⁴.

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \tilde{O}(\vec{f}) \Gamma_s(\lambda d_i \vec{f}) \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{x}) P^*(\vec{x} - \lambda d_i \vec{f}) d\vec{x} \quad (1.63)$$

⁴ Iagen geométrica es la distribución de irradiancia semejante a la del objeto, reescalada pero no deformada.

Denotando por $H_o(\vec{f})$ la OTF para un sistema óptico limitado por difracción llegamos a:

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \tilde{O}(\vec{f})\Gamma_s(\lambda d_i \vec{f})H_o(\vec{f}) \quad (1.64)$$

Esta expresión se puede interpretar de la siguiente forma: el espectro de la imagen $\tilde{I}(\vec{f})$ es una versión filtrada del espectro de la imagen geométrica $\tilde{O}(\vec{f})$. El filtro consiste en dos componentes: 1) el filtro debido a un sistema óptico libre de aberraciones, $H_o(\vec{f})$ y 2) un filtro debido a las perturbaciones aleatorias sufridas por el campo incidente, $\Gamma_s(\lambda d_i \vec{f})$.

Llegados a este punto de la discusión definimos la función de transferencia óptica de larga exposición $H_{LE}(\vec{f})$ {50}.

$$H_{LE}(\vec{f}) = \frac{\Gamma_s(\lambda d_i \vec{f})}{\Gamma_s(0)} \quad (1.65)$$

Con esta nueva definición obviando las constantes de normalización tanto de $H_o(\vec{f})$ como $H_{LE}(\vec{f})$, la expresión (1.64) se puede reescribir:

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \tilde{O}(\vec{f})H_{LE}(\vec{f})H_o(\vec{f}) \quad (1.66)$$

Partiendo de otro punto de vista, considerando la perturbación atmosférica como una aberración del sistema óptico, introduciéndola como un factor en la pupila generalizada y realizando el promediado sobre distintas perturbaciones llegamos a que la función de transferencia promedio del sistema es igual a:

$$\langle H(\vec{f}) \rangle = H_{LE}(\vec{f})H_o(\vec{f}) \quad (1.67)$$

Para completar la caracterización de la función de transferencia de larga exposición nos queda incorporar la estadística de la perturbación del campo. En la sección 1.1 vimos que la función de correlación del campo venía dada por la expresión:

$$\Gamma_u(\Delta\bar{x}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}D_\psi(\Delta\bar{x})\right\} \quad (1.68)$$

donde se trabajo bajo la hipótesis de campo cercano, de forma que la perturbación introducida solo afectaba a la fase. Bajo esta aproximación se puede decir que la función de estructura espacial de campo es igual a la función de estructura espacial de la fase. En el caso de que la perturbación sea tanto de fase como de amplitud la expresión cambia un poco {51}.

$$\Gamma_u(\Delta\bar{x}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(D_\chi(\Delta\bar{x}) + D_\psi(\Delta\bar{x}))\right\} \quad (1.69)$$

donde:

$$\begin{aligned} D_\chi(\Delta\bar{x}) &= \left\langle [\chi(\bar{x}) - \chi(\bar{x} + \Delta\bar{x})]^2 \right\rangle \\ D_\psi(\Delta\bar{x}) &= \left\langle [\psi(\bar{x}) - \psi(\bar{x} + \Delta\bar{x})]^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (1.70)$$

siendo $D_\chi(\Delta\bar{x})$ la función de estructura espacial de la amplitud logarítmica y $D_\psi(\Delta\bar{x})$ la función de estructura espacial de la perturbación de fase. La suma de las funciones de estructura de fase y amplitud se denomina función de estructura de campo.

$$D(\Delta\bar{x}) = D_\chi(\Delta\bar{x}) + D_\psi(\Delta\bar{x}) \quad (1.71)$$

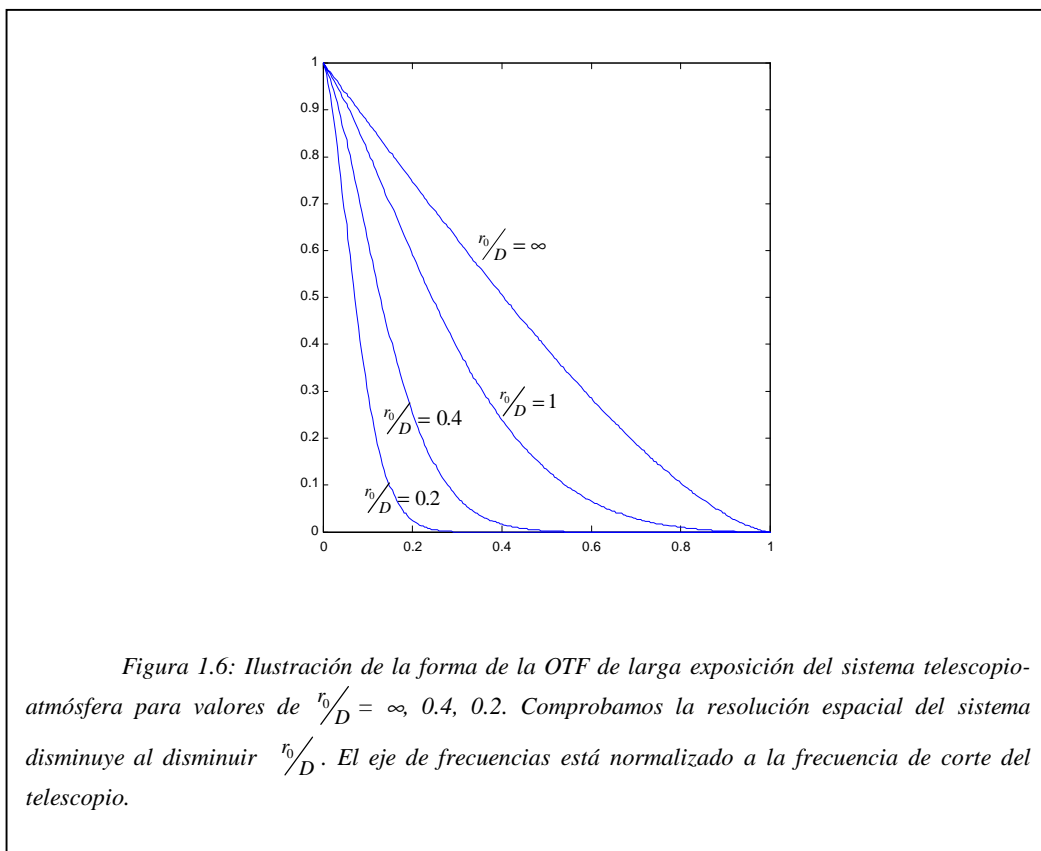
Substituyendo esta expresión en (1.68) y esta en (1.66) llegamos a una nueva expresión de la OTF {51}:

$$H_{LE}(\vec{f}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}D(\lambda d_i \vec{f})\right\} \quad (1.72)$$

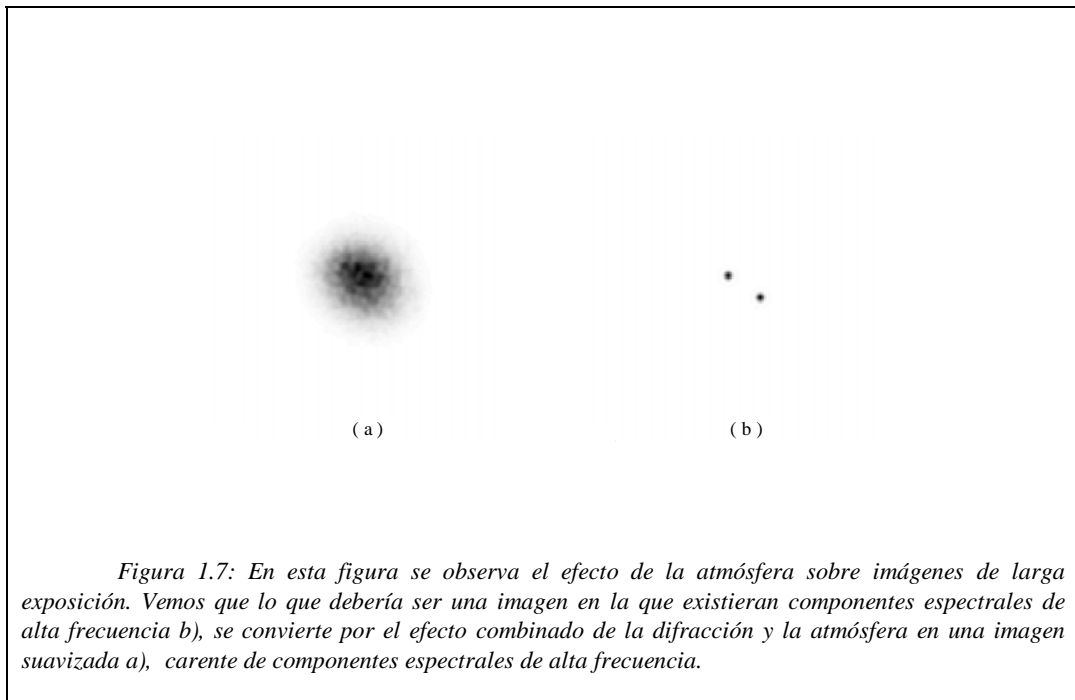
Introduciendo en la expresión (1.72) la función de correlación del campo de una onda que se propaga por un medio isotrópico localmente homogéneo descrito por el espectro de potencias de Kolmogorov llegamos a la bien conocida expresión de la OTF de larga exposición {19}:

$$H_{LE}(\vec{f}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} 6.88 \left(\frac{|\lambda d_i \vec{f}|}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right\} \quad (1.73)$$

En la figura 1.6 representamos la expresión (1.67) con intención de mostrar la forma de la función de transferencia óptica del sistema telescopio-atmósfera. Se puede observar en dicha figura que el sistema telescopio-atmósfera se comporta como un filtro pasabaja que atenúa las frecuencias del espectro, siendo dicha atenuación mayor cuanto menor es el parámetro r_0 .



El efecto que produce la disminución de la resolución espacial en la imagen de larga exposición es el emborronamiento. Baja resolución espacial significa que las altas frecuencias que puedan existir en el espectro del objeto son fuertemente atenuadas por nuestro sistema, provocando así el suavizado o emborronamiento. A continuación mostramos visualmente este efecto.



1.3.2 OTF de corta exposición

El término corta exposición quiere indicar que el tiempo empleado para tomar la imagen es suficientemente corto como para considerar que la atmósfera ha cambiado. Vamos a explicar esta afirmación un poco más. La atmósfera es un medio cambiante. En base a las observaciones realizadas se determinó que se puede definir un tiempo típico de cambio para la atmósfera, denominado periodo característico de la atmósfera. Así

podremos definir el término imagen de corta exposición como aquella imagen que se adquiere con un tiempo de exposición menor que el periodo característico de cambio de la atmósfera. Dicho de otra forma que la OTF atmosférica ha sido la misma durante todo el tiempo empleado en el proceso de adquisición. Uno de los efectos dominantes de la atmósfera es la introducción de *tilt* aleatorio en el frente de ondas. El *tilt* se describe matemáticamente como la pendiente del plano que se ajusta mejor al frente de ondas incidente. El efecto de esta componente del frente de ondas es un desplazamiento transversal de toda la imagen. Este desplazamiento aleatorio es una de las principales fuentes de degradación de las fotos de larga exposición. En el caso de la corta exposición el *tilt* no degrada las imágenes, solo las desplaza por el plano de observación, la degradación se debe a otros términos del desarrollo en serie de la perturbación.

El procesado de imágenes de corta exposición tiene en algunos casos una primera etapa en la que se compensa el *tilt*. La compensación se realiza con espejos durante el proceso de adquisición de la imagen, o se realiza posteriormente de forma computacional. Una vez centradas las imágenes se realiza el promedio. Este proceso de promediado nos lleva a establecer un nuevo camino para obtener la función de transferencia promedio de corta exposición. El punto de partida consiste en trabajar con una perturbación de fase a la que se le compensó el *tilt* de forma exacta { 19 }:

$$\psi_c(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) - \bar{a}\bar{x} \quad (1.74)$$

Trabajaremos con esta expresión para calcular la función de correlación de campo bajo la hipótesis de campo cercano. Siguiendo el mismo camino que en el apartado anterior tenemos:

$$\Gamma_{CE}(\Delta\bar{x}) = \langle \exp\{j[\psi_c(\bar{x}) - \psi_c(\bar{x} + \Delta\bar{x})]\} \rangle \quad (1.75)$$

Introduciendo (1.74) en (1.75) obtenemos:

$$\Gamma_{CE}(\Delta\bar{x}) = \langle \exp\{j[\psi(\bar{x}) - \psi(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \bar{a}\Delta\bar{x}]\} \rangle \quad (1.76)$$

Realizando el promedio de la exponencial y suponiendo que 1) la distribución estadística de $\psi_c(\vec{x})$ y \bar{a} es gaussiana; 2) $\psi_c(\vec{x})$ y \bar{a} no están correlacionados entre sí, llegamos a la siguiente expresión para la función de correlación espacial del campo {52}:

$$\Gamma_{CE}(\Delta\vec{x}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(D_\psi(\vec{x}) + \left\langle (\bar{a}\lambda d_i \vec{f})^2 \right\rangle\right)\right\} \quad (1.77)$$

La primera hipótesis se deriva directamente de haber supuesto que la perturbación de fase introducida por la perturbación atmosférica siguiera una distribución gaussiana, la segunda hipótesis no es del todo correcta, pero se comprobó que si era una buena aproximación sobre todo si la pupila del sistema es mucho mayor que r_0 .

Recordamos que hasta ahora la deducción de la OTF de corta exposición se realizó bajo la hipótesis de campo cercano. La extensión al caso general de campo lejano se realiza sin más que sustituir en las expresiones de la correlación espacial del campo la función de estructura de fase por la función de estructura del campo.

$$\Gamma_{CE}(\Delta\vec{x}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(D(\vec{x}) + \left\langle (\bar{a}\lambda d_i \vec{f})^2 \right\rangle\right)\right\} \quad (1.78)$$

Según queramos trabajar bajo la hipótesis de campo cercano o lejano sólo tendremos que considerar $D(\vec{x})$ como la función de estructura de fase o como la función de estructura de campo:

$$D(\vec{x}) = \begin{cases} D_\psi(\vec{x}) & \text{campo cercano} \\ D_\chi(\vec{x}) + D_\psi(\vec{x}) & \text{campo lejano} \end{cases} \quad (1.79)$$

Fried, {19,53}, calculó el valor del factor $\langle \bar{a}\bar{a} \rangle$. Introduciendo este valor en la expresión (1.73), así como el valor de la función de estructura de fase, llegamos a la expresión de la OTF de corta exposición.

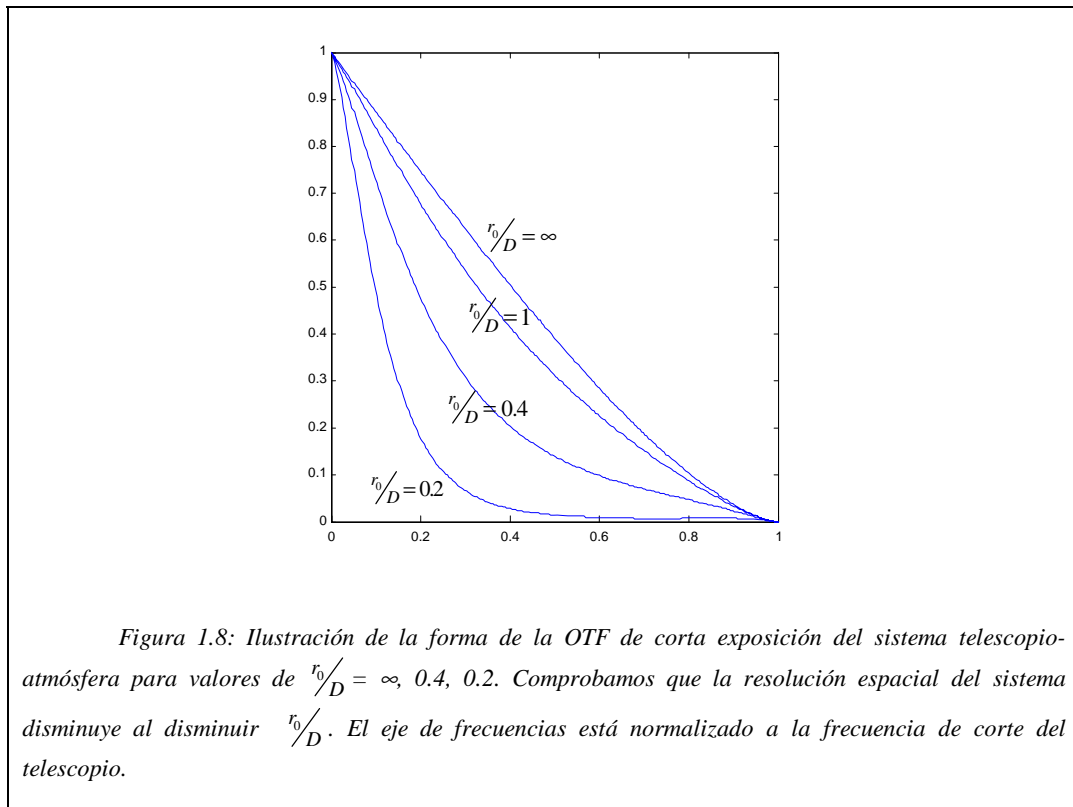
$$H_{CE}(\vec{f}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}6.88\left(\frac{|\lambda d_i \vec{f}|}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}} - \left[1 - \left(\frac{|\lambda d_i \vec{f}|}{D}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\} \quad (1.80)$$

donde D es el diámetro de la pupila del sistema.

Al igual que en el caso del apartado anterior la función de transferencia del sistema telescopio-atmósfera va a ser el producto de las dos OTF,

$$\langle H(\vec{f}) \rangle = H_{CE}(\vec{f})H_o(\vec{f}) \tag{1.81}$$

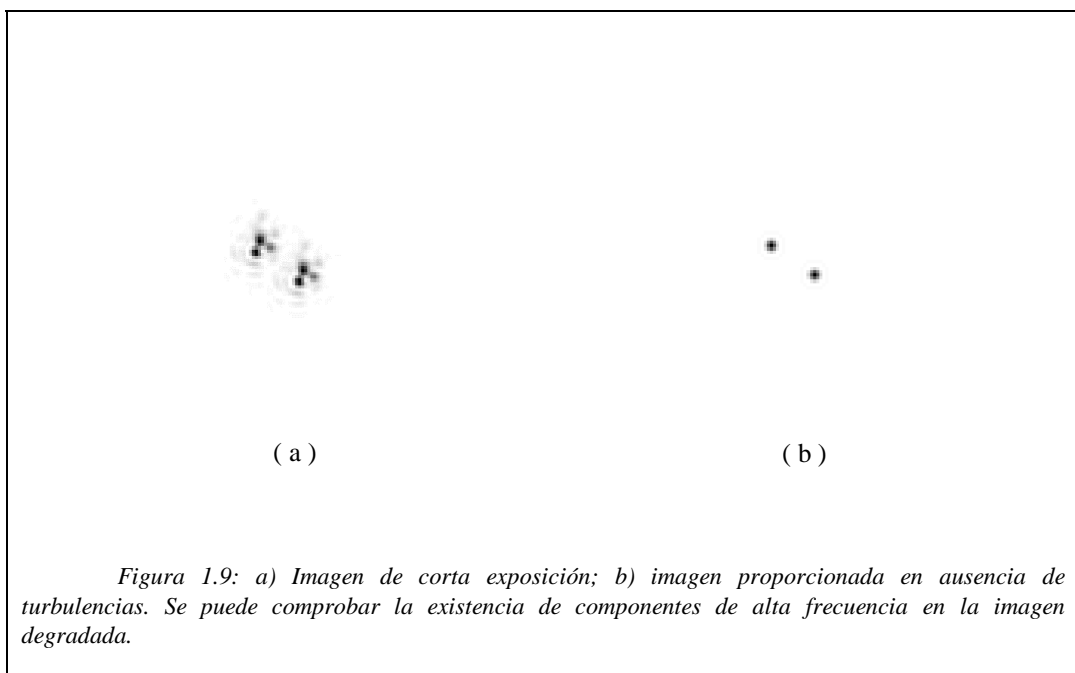
Comparando la figura 1.8 con la figura 1.6 observamos que la OTF de corta exposición no atenúa tan fuertemente las componentes de frecuencia del espectro como la OTF de larga exposición. Esta diferencia se traduce en que la imagen de corta exposición tiene más información de alta frecuencia que la imagen de larga exposición.



En la figura 1.9 se observan la imagen de corta exposición de una estrella binaria, la misma empleada para ver el efecto de la atmósfera sobre imágenes de larga exposición. Se puede observar que el emborronamiento típico de las imágenes de larga exposición no se aprecia en este caso. Sin embargo las altas frecuencias están modificadas, como se puede ver por la aparición de falsos detalles en la figura 1.9.a.

El hecho de que en las imágenes de corta exposición existan componentes de alta frecuencia permite desarrollar técnicas que traten de realzar las componentes existentes pero que han sido fuertemente atenuadas por la atmósfera. Estas técnicas son las técnicas de Óptica Adaptativa e Imagen Speckle.

En el capítulo siguiente describiremos cada una de estas técnicas, como avance decir que la Óptica Adaptativa se emplea para corregir la imagen antes de adquirirla mientras que la técnica de Imagen speckle se emplea tras la adquisición.



CAPITULO II:

Estrategias de reconstrucción de imagen

Una vez hemos descrito, en el capítulo anterior, el proceso de formación y degradación de la imagen, es interesante describir las técnicas que se emplean para compensar dicha degradación. Nos centraremos en aquellas técnicas que mayor uso han tenido en el marco de la astronomía. Así en este capítulo describiremos las técnicas de Interferometría Speckle, Óptica Adaptativa y, de forma más extensa, la técnica de Deconvolución Postdetección.

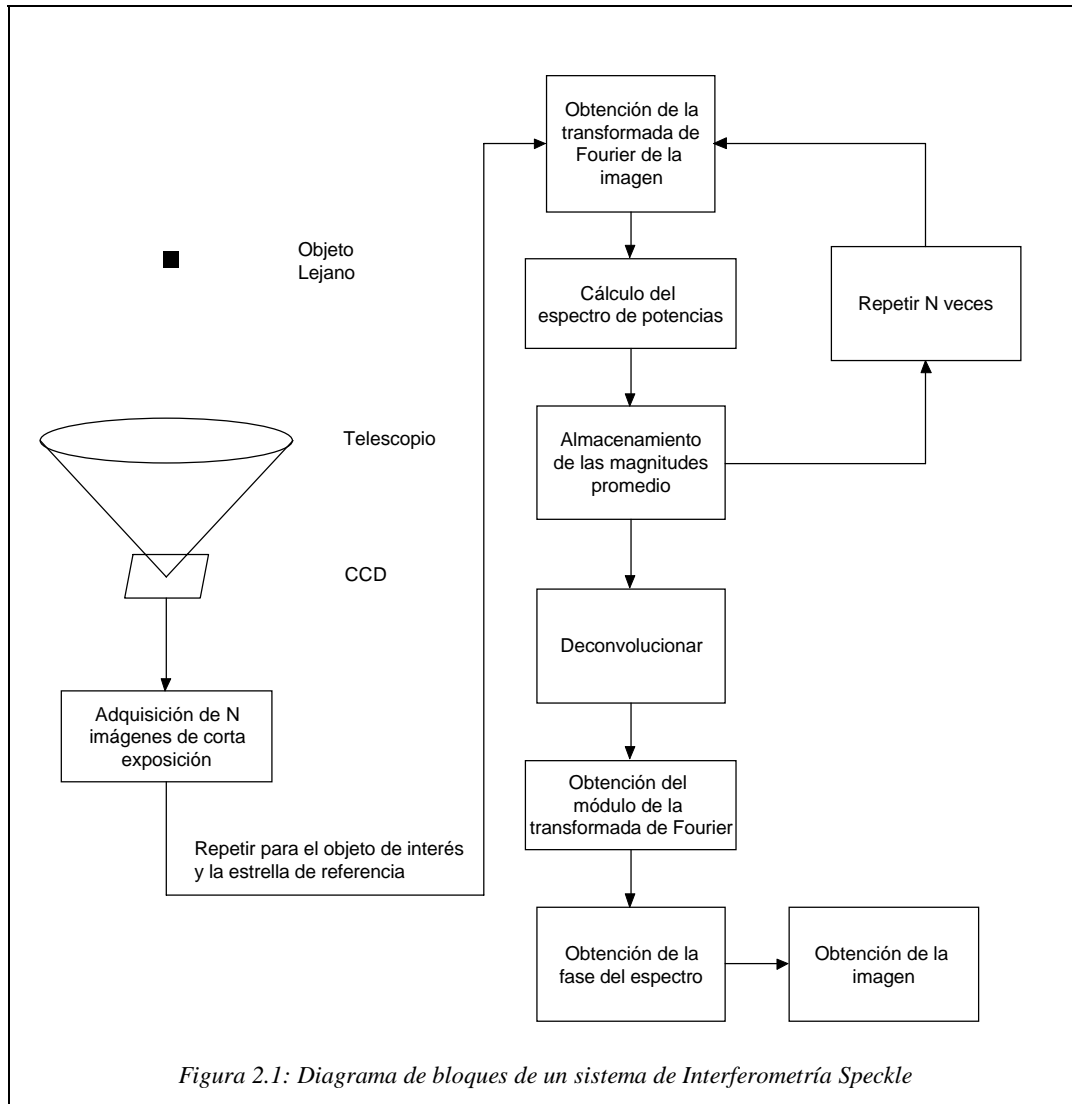
2.1 Interferometría Speckle

La interferometría speckle es una técnica que se engloba dentro de la categoría de “Técnicas de imagen speckle”. Todas las técnicas englobadas en este grupo tienen en común que son aplicadas en un proceso posterior al de la adquisición de la imagen, son pues técnicas de procesado postdetección.

El precursor o iniciador de la técnica de interferometría speckle fue A. Labeyrie en 1970 {1}. Observando fotos de corta exposición se dio cuenta de que dichas fotos contenían más información sobre las frecuencias altas del espectro de potencias del objeto que las fotos obtenidas con larga exposición. La técnica desarrollada por Labeyrie y sobre la cual hablaremos más adelante, se usó inicialmente para determinar la posición relativa entre estrellas binarias. Posteriormente se intentó usar esta técnica en aplicaciones donde se requería trabajar con imágenes de objetos extensos y se comprobó que en el proceso propuesto por Labeyrie la información sobre la fase del objeto se perdía, haciéndose de esta forma imposible reconstruir una imagen extensa a partir del espectro. Surgieron así técnicas complementarias que permiten obtener la fase del objeto. De estas técnicas las más empleadas son las de Knox-Thompson, espectro cruzado y biespectro {2, 3, 4, 5, 6, 7}.

La técnica de interferometría speckle consiste en estimar el módulo del espectro de frecuencias espaciales del objeto de interés, siendo el objeto de interés aquel cuerpo celeste que queremos observar. Siguiendo el diagrama de bloques de la figura 2.1 se puede comprender el proceso que sigue esta técnica. Como primer paso se recoge una serie de imágenes de corta exposición del objeto de interés. Simultáneamente se recoge otra serie de imágenes, también de corta exposición, del objeto de referencia, que consiste en una estrella brillante natural o artificial, situada muy cerca angularmente del objeto de interés. Las imágenes del objeto de referencia se van a usar para compensar la distorsión introducida por la atmósfera sobre la imagen de interés, ya que nos van a proporcionar la

información sobre el sistema telescopio-atmósfera, necesaria para restaurar la imagen de interés.



El segundo paso consiste en realizar la transformada de Fourier de cada una de las muestras, tanto del objeto de interés como del de referencia. Posteriormente nos quedamos con el módulo del espectro. Tras realizar esta operación con todas las muestras se computa el promedio. Por último se realiza la deconvolución del módulo de la imagen de interés, recuperando así las frecuencias que habían sido atenuadas. Matemáticamente el proceso se puede resumir en la siguiente expresión {1}.

$$\langle |\tilde{O}(\vec{f})|^2 \rangle = \frac{\langle |\tilde{I}(\vec{f})|^2 \rangle}{\langle |R(\vec{f})|^2 \rangle} \quad (2.1)$$

donde $\langle |\tilde{O}(\vec{f})|^2 \rangle$ es el valor medio del módulo cuadrado del espectro del objeto de interés, $\langle |R(\vec{f})|^2 \rangle$ es el valor medio del módulo cuadrado del espectro del objeto de referencia normalizado y $\langle |\tilde{I}(\vec{f})|^2 \rangle$ es el valor medio del módulo cuadrado del espectro de la imagen de interés. El denominador de la expresión (2.1) se interpreta como la OTF de corta exposición. Para comprender esta afirmación basta con darse cuenta de que la imagen del objeto de referencia constituye la PSF del sistema telescopio-atmósfera, que es el sistema que degrada la imagen de interés.

Como ya dijimos con anterioridad si se desea obtener como resultado final una imagen es necesario calcular la fase del espectro del objeto de interés. Empleamos entonces las técnicas de espectro cruzado o biespectro. La técnica de espectro cruzado trabaja a partir del espectro cruzado de la imagen {2, 5, 9}:

$$C(\vec{f}, \Delta\vec{f}) = \tilde{I}(\vec{f}) \cdot \tilde{I}^*(\vec{f} + \Delta\vec{f}) \quad (2.2)$$

El interés de esta magnitud radica en que se consigue codificar la fase del espectro del objeto como una diferencia de fases. Por otra parte la técnica de biespectro trabaja con la expresión {10, 3}:

$$B(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \tilde{I}(\vec{f}_1) \cdot \tilde{I}(\vec{f}_2) \cdot \tilde{I}^*(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \quad (2.3)$$

Al igual que en la técnica anterior la fase se codifica como una diferencia de fase, pero en este caso entre tres puntos.

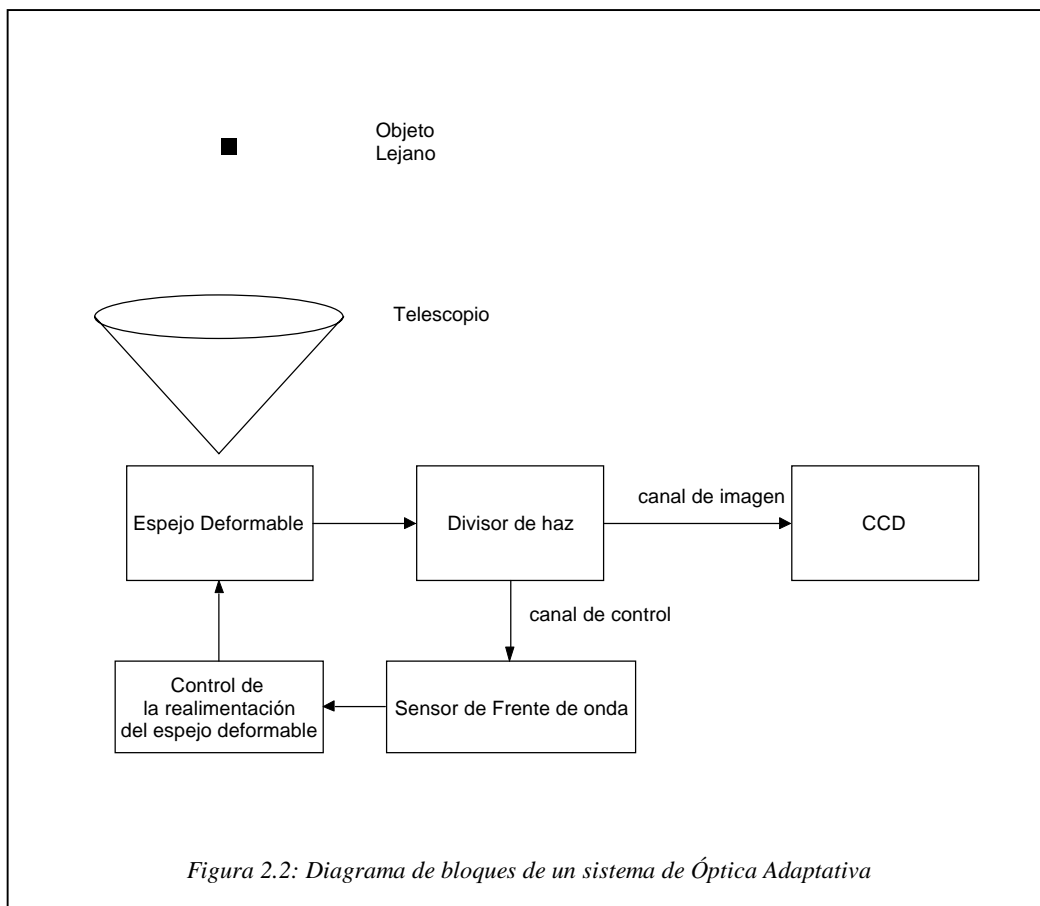
El empleo de la técnica de Interferometría Speckle tiene dos grandes inconvenientes: baja relación señal ruido, debido al grado de aleatoriedad de la turbulencia atmosférica; y necesidad de empleo de un paso en el que se recupere la fase del espectro de la imagen.

La técnica de Interferometría Speckle fue la primera aproximación al problema de la restauración de imágenes astronómicas degradadas por turbulencias atmosféricas. Con anterioridad se había planteado la posibilidad de realizar la compensación de forma mecánica, pero las exigencias técnicas que conllevaba la implementación de un sistema que realizase la compensación de esta forma estaba muy por encima de los recursos existentes [15]. Esta técnica se denomina Óptica Adaptativa.

2.2 Sistemas Adaptativos

En contraposición a las técnicas de imagen speckle, que son aplicadas tras la adquisición y almacenamiento de las imágenes y que se desarrollan en el ámbito del procesado computacional de imágenes, los sistemas adaptativos son sistemas optomecánicos de presión que tratan de compensar la distorsión introducida en la fase del campo óptico. Principalmente esta compensación se realiza mediante el uso de espejos deformables que se emplean para formar imagen [11, 12, 13, 14].

La idea de compensar la distorsión de fase usando servosistemas surgió en la mente de H.W. Babcock, el cual en 1953 publicó un artículo cuyo título, “The possibility of compensating astronomical seeing”, expresa el contenido del mismo [15]. La base del pensamiento se encuentra en considerar que la causa de las aberraciones está en que los rayos procedentes del objeto siguen distintos caminos ópticos produciéndose un desfase



entre ellos. Así con un mecanismo que permita volver a igualar los caminos ópticos se conseguirá la corrección.

La implementación práctica de un sistema adaptativo incluye el diseño de varios bloques. Como se puede observar en el diagrama de bloques de la figura 2.2 un sistema adaptativo consta principalmente de dos canales. Un primer canal, el canal de la imagen, y un segundo canal que determina y ejecuta la compensación. El segundo canal consta de un sensor de frente de ondas y de un servosistema que permite compensar la distorsión introducida por la atmósfera {13}. Principalmente se usan tres tipos de sensores de frente

de onda, el interferómetro de desplazamiento lateral, el sensor Shack-Hartmann y el sensor de curvatura {16, 17, 18, 19, 63,64}.

El interferómetro de desplazamiento lateral consiste en un sensor de tipo interferométrico. La particularidad de este sistema interferométrico se encuentra en que el patrón de interferencia se consigue haciendo interferir un haz del campo del que queremos conocer su frente con otro haz del mismo campo pero desplazado un poco espacialmente. El desplazamiento de las franjas se produce en proporción al gradiente de la fase, así pues es un sensor de gradiente. Este método tiene la ventaja de que no se necesita onda de referencia. Por otra parte tiene el inconveniente de que necesita un flujo fotónico alto para poder repartir la radiación incidente entre los dos haces que se hacen interferir.

El sensor Shack-Hartmann es también un sensor de gradiente de onda. Permite obtener la fase del campo a partir de medidas del gradiente local de la fase en ciertos puntos. La utilización de CCD como medio de registro en este tipo de sensores ha servido para potenciar su versatilidad. La extensa utilización de este tipo de sensor se debe a que permite trabajar con radiación no monocromática, posee gran fiabilidad al trabajar con fuentes extensas y bajo flujo fotónico, y en aplicaciones en las que interesa trabajar en tiempo real su utilidad se realiza ya que permite obtener con gran rapidez una estimación del frente de onda estudiado.

Por último mencionar el sensor de curvatura. Este permite determinar el frente a partir de medidas de su curvatura. Este sensor proporciona la distribución de irradiancia en dos planos distintos. Su uso se está extendiendo debido a su sencillez y a la ausencia de problemas en su calibración. El empleo del sensor de curvatura se está empezando a imponer en el campo de la Óptica Adaptativa en aquellos sistemas que emplean espejos bimorfos o de membrana. La razón de este auge se debe a que la ecuación que rige el transporte de energía entre dos planos es la misma que la que hay que resolver para compensar la distorsión de fase con uno de estos espejos. De esta forma los datos proporcionados por el sensor se pueden emplear directamente para mover los actuadores que deforman los espejos {11,55,56,57} .

La compensación de la distorsión producida en la fase del campo incidente se realiza usando espejos deformables. El control de los espejos deformables se realiza mediante software específico que permite una vez conocida la fase del campo incidente disponer el espejo de tal forma que tras reflejarse el campo en ellos, la fase final sea plana.

Uno de los principales inconvenientes que tiene esta tecnología es el elevado coste de implementación y mantenimiento del lazo de control y compensación. Otros inconvenientes son; el error cometido al emplear un conjunto finito de actuadores en el espejo deformable que impone una limitación en la corrección del frente y el tiempo que se tarda en conocer la fase del campo incidente y compensar la deformación. Este último inconveniente quizás sea el más importante pues mientras se caracteriza la onda incidente y se aplica la compensación, la fase de la onda que incide en el momento de la compensación ya es otra ligeramente distinta a la caracterizada. La solución de este problema pasa por el empleo de técnicas de procesamiento postdetección. También hay que mencionar la existencia de otro error, el error de estimación del frente que se va a emplear para deformar el espejo. Este error va a acompañar a todas las técnicas que necesiten de una estimación de la perturbación del frente para restaurar la imagen.

A continuación describiremos una técnica complementaria de la Óptica Adaptativa y alternativa a la Interferometría Speckle denominada Deconvolución Postdetección. Esta técnica es una mezcla de las dos anteriores, realiza la restauración tras la adquisición de la imagen a nivel computacional, y emplea las medidas proporcionadas por un sensor de frente de onda para estimar la perturbación de fase introducida por la atmósfera.

2.3 Deconvolución Postdetección

A lo largo de los apartados anteriores hemos visto dos formas distintas de realizar la corrección de la degradación introducida por una atmósfera turbulenta. La primera de ellas consistía en un proceso meramente computacional, mientras que la segunda trataba de realizar la corrección de forma mecánica. Un tercer enfoque consiste en emplear las llamadas técnicas de imagen híbridas [20].

El origen de la denominación, técnicas de imagen híbridas, se encuentra en que las técnicas englobadas en esta categoría emplean el procesado computacional típico de la técnica de imagen speckle y un sensor de frente de ondas típico de las técnicas de óptica adaptativa.

El interés que tienen las técnicas de imagen híbridas radica en que supera algunos de los inconvenientes que acompañan tanto al empleo de la óptica adaptativa: el elevado coste de los espejos deformables, el tiempo de retardo acumulado entre la detección del frente y su corrección, como de las técnicas speckle: ya sea la relación señal ruido baja y postprocesado adicional para el cálculo de la fase del espectro. Pero aunque supere los problemas mencionados tenemos que decir que en ciertas condiciones estas técnicas superan a la Deconvolución postdetección. Por ejemplo para el caso de objetos no extensos y contando con muchas muestras la Interferometría Speckle es, en términos generales, superior a la Deconvolución. En el caso de la observación de objetos poco brillantes la Óptica Adaptativa presenta algunas ventajas respecto a la Deconvolución, pues reduce el ruido fotónico, ya que concentra la radiación luminosa antes de detectarla y mayor incidencia de fotones sobre un pixel implica menor ruido fotónico sobre ese pixel.

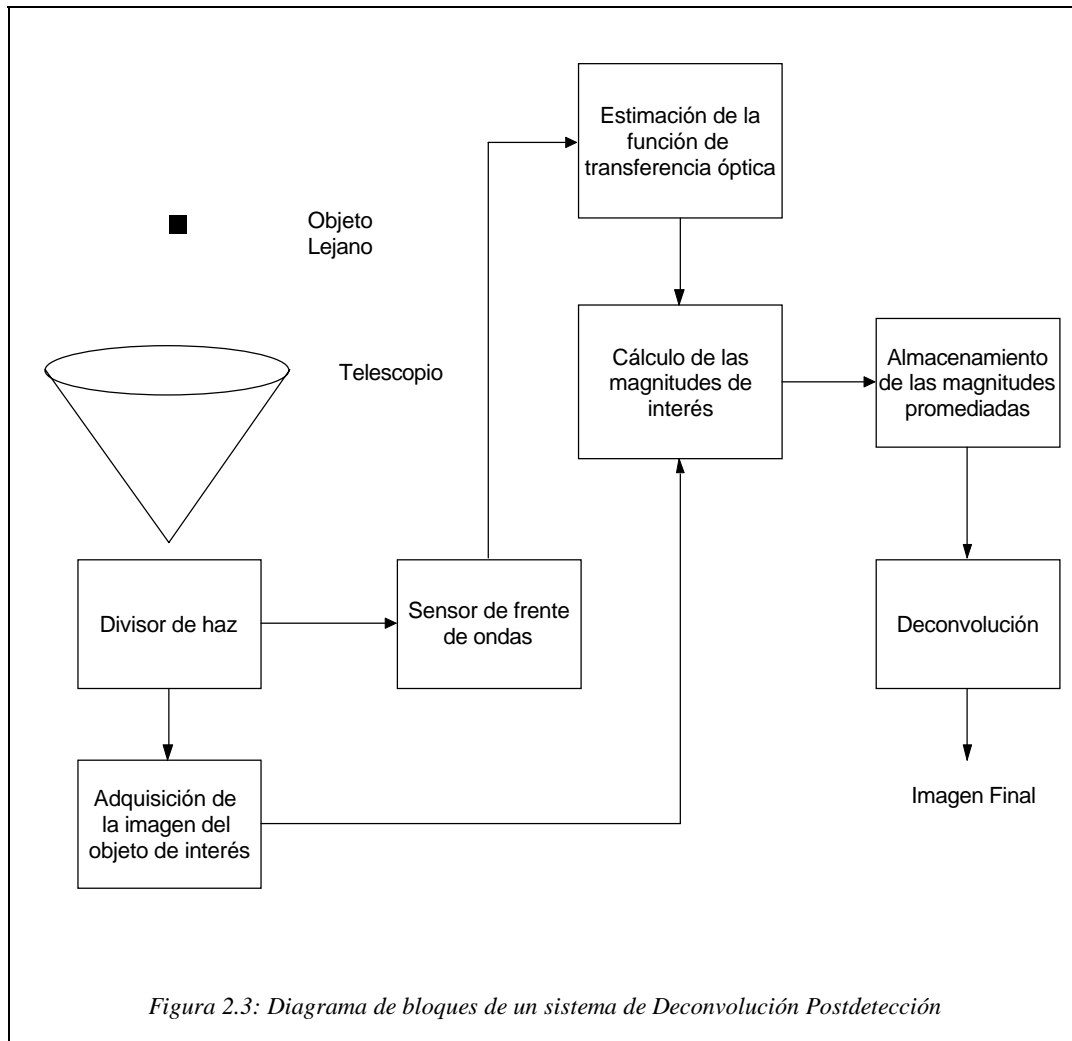
Dentro del conjunto de técnicas de imagen híbridas se encuentra la técnica de Deconvolución Postdetección¹. Centrémonos por un momento en el campo de la Teoría de

¹ Otros nombres que describen esta técnica y que es útil conocer son : Speckle Holography, Deconvolution a posteriori, Deconvolution from Wave-front sensing.

sistemas. Supongamos un sistema lineal, que consta de una entrada, una función de transferencia y una salida. Conociendo la entrada y la función de transferencia se puede obtener como será la salida. Del mismo modo si conocemos la salida y la función de transferencia podemos conocer la entrada. Haciendo una analogía con el caso de las observaciones astronómicas, tendríamos que la entrada del sistema sería cualquier cuerpo celeste, por ejemplo una estrella doble, la función de transferencia vendría dada por las características de la atmósfera, y la salida sería la imagen que recogemos en nuestro ojo, cámara de fotos o CCD. Por lo tanto a partir de la imagen obtenida con nuestro detector y del conocimiento de la función de transferencia, de la atmósfera, podemos en principio conocer el objeto mediante una deconvolución. Esta visión tan esquemática representa la filosofía que subyace en la técnica de deconvolución postdetección. La calidad de la reconstrucción estará en cualquier caso limitada por los ceros de la OTF, ruido, etc.

Para poder emplear de la técnica de deconvolución postdetección necesitamos movernos dentro de la hipótesis de Taylor. Esta hipótesis supone que la atmósfera está *congelada* durante el tiempo de adquisición de la imagen. El término congelación indica que las fluctuaciones del índice de refracción permanecen estáticas durante un intervalo de tiempo corto, excepto por traslaciones perpendiculares a la dirección de observación, originadas por vientos de velocidad uniforme. Otra forma de expresar lo mismo es diciendo que la atmósfera permanece estática en cortos períodos de tiempo, del orden de milisegundos, de forma que la función de transferencia del sistema no va a evolucionar mientras se adquiere la muestra.

Fue D.L. Fried el que desarrollo la posibilidad de deconvolucionar imágenes estelares a partir de la medida del frente de ondas. Posteriormente la investigación en este campo la continuaron, Primot {21} que propuso un estimador del espectro del objeto diferente al que había propuesto Fried, Gonglewski et.al. {22} que proporcionaron las primeras imágenes astronómicas compensadas con esta técnica, Roggemann{23, 24, 25, 26}, Dayton {27}, Welsh {28} y Ford {29} entre otros.



La implementación de un sistema que emplee la técnica de deconvolución postdetección es muy parecido al de un sistema adaptativo, excepto en el hardware requerido. En la figura 2.3 mostramos el diagrama de bloques de un sistema que emplee esta técnica. Un divisor de haz reparte la luz recolectada por el telescopio en dos canales. Uno de ellos se llamará canal imagen y su función será formar la imagen del objeto de interés. El otro canal, es el canal del sensor de frente de ondas. La función de este canal es medir el frente de ondas con el que llega el campo óptico a la pupila de entrada del

sistema, con la intención de calcular con posterioridad la función de transferencia de la atmósfera en el momento de la adquisición de la imagen. Las señales que se reciben por los dos canales se toman simultáneamente, y se almacenan. La operación se repite varias veces. Por último se realiza el postprocesado de todos los pares de muestras.

2.3.1 Canal de la imagen

El canal de la imagen es el más sencillo de los dos canales. Básicamente está formado por el telescopio y el dispositivo de adquisición de la imagen, que normalmente será una cámara CCD.

El empleo de la técnica de deconvolución postdetección impone el empleo de tiempos de exposición cortos, del orden de milisegundos, inferiores al tiempo de cambio de la atmósfera. Como contrapartida a la ventaja adquirida al trabajar con tiempos de exposición cortos tenemos que en casos de flujo fotónico bajo el número de fotones adquiridos va a ser pequeño de forma que tendremos un ruido fotónico elevado. Así nos encontramos ante un compromiso entre el tiempo de exposición y el ruido fotónico.

Al igual que en el caso de la elección del tiempo de exposición, nos encontramos con otro compromiso a la hora de elegir la CCD. El compromiso se encuentra al elegir el tamaño de los píxeles de la CCD. Píxeles pequeños van a permitir mayor resolución espacial, pero también van a recoger menor número de fotones, lo que lleva a un mayor ruido fotónico.

2.3.2 Canal del sensor de frente de onda

Para poder aplicar la técnica de deconvolución a posteriori se necesita conocer el estado de la atmósfera en el momento en el que se toma la imagen. Con motivo de recoger esta información se emplean los sensores de frente de onda.

El canal del sensor consta básicamente de dos bloques: sistema de relé y sensor de frente de ondas. El sistema de relé consiste en un conjunto de elementos ópticos que tratan de transportar la distribución de campo existente en la pupila de entrada del sistema hasta el plano en el que esta situado el sensor de frente de onda. El sensor de frente de onda tiene la función de proporcionar información sobre el frente de onda de la radiación existente en la pupila de entrada del sistema en el momento en el que se adquiere la imagen.

Existe una gran cantidad de sensores de frente de onda. En el campo de la astronomía se han venido empleando el sensor de desplazamiento lateral, el sensor Shack-Hartmann y el sensor de curvatura. Anteriormente hemos realizado una breve descripción de estos tres tipos de sensores. A continuación describiremos con mayor profundidad el sensor de onda tipo Shack-Hartmann, pues será el que emplearemos en el simulador del sistema de Deconvolución Postdetección.

2.3.2.1 Sensor Shack-Hartmann

El sensor Shack-Hartmann es un dispositivo de muestreo del frente de onda. Consiste en un mosaico de subpupilas que muestrean el frente de ondas del campo óptico incidente. Cada subpupila proporciona en su plano focal el patrón de difracción, en régimen de Fraunhofer, correspondiente a la distribución de campo existente sobre ella. Se puede demostrar que el desplazamiento del centroide de la distribución de irradiancia obtenida en el plano imagen de cada subpupila está relacionado con el gradiente promedio del frente de ondas sobre cada una de ellas {30,58}. Así, se puede decir que el sensor Shack-Hartmann es un sensor que proporciona medidas del gradiente local del frente de onda promedio sobre cada subpupila.

El montaje del sensor consta de una matriz de microlentes, un detector de radiación y un sistema de relé que se encarga de transportar la distribución de irradiancia

obtenida en el plano focal de las subpupilas hasta el plano en el que está situado el detector de radiación. Durante los últimos años se ha extendido enormemente el uso de las cámaras tipo CCD como detector de radiación. El uso de estos aparatos conlleva un proceso de discretización de la distribución de irradiancia en el plano del registro. Esto lleva a tener que trabajar con expresiones discretas para el cálculo del centroide de la imagen proporcionada por cada subpupila del sensor:

$$x_c = \frac{\sum_{i,j} x_j I_{ij}}{\sum_{i,j} I_{ij}} \quad y_c = \frac{\sum_{i,j} y_i I_{ij}}{\sum_{i,j} I_{ij}} \quad (2.4)$$

donde x_j , y_i , I_{ij} son las coordenadas y número de cuentas asociadas al pixel de la fila i , columna j de la matriz de salida del detector.

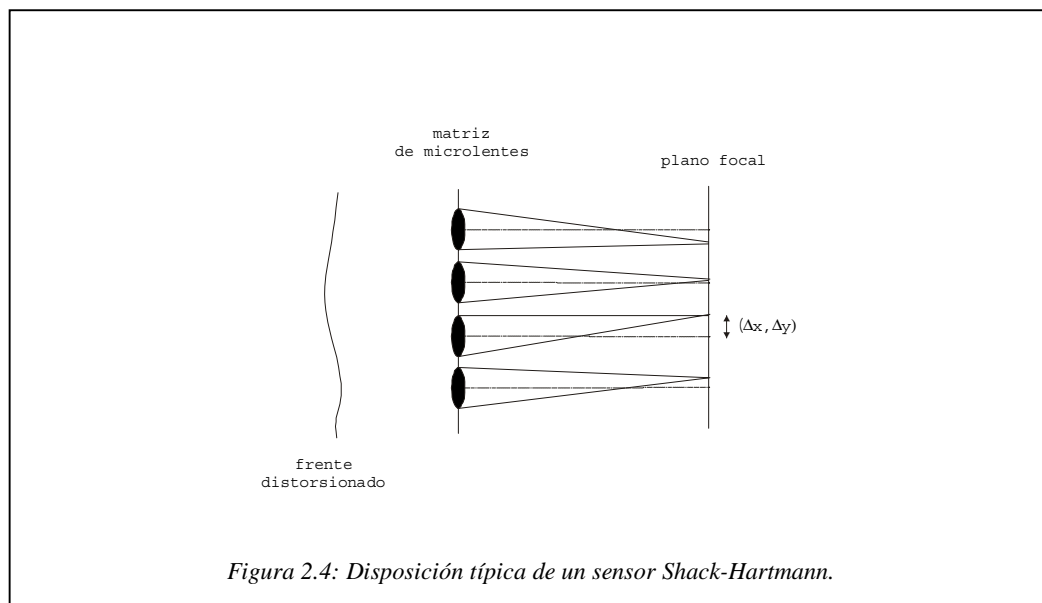


Figura 2.4: Disposición típica de un sensor Shack-Hartmann.

Es bien conocido el hecho de que la precisión del sensor Shack-Hartmann viene limitada principalmente por el error en la determinación de los centroides. El error en el centroide se debe principalmente a ruido fotónico, muestreo finito y discreto de la distribución de irradiancia de la imagen tanto espacial como en niveles de gris, y ruido de lectura de la CCD, este último quizás sea el menos determinante pues se puede reducir con éxito incorporando a la cámara un sistema de refrigeración. Con carácter práctico podemos añadir que también influye en el error que se comete en la determinación del centroide el tamaño de la matriz de pixeles que empleemos para calcular el centroide, {31, 32}.

Así pues el sensor Shack-Hartmann consiste en un dispositivo que proporciona el gradiente de una señal bidimensional en una serie de puntos. ¿Cómo obtener el frente de onda a partir de información sobre su gradiente en ciertos puntos?. Esta es una pregunta que se puede abordar básicamente desde dos perspectivas. Se puede intentar una reconstrucción zonal o modal.

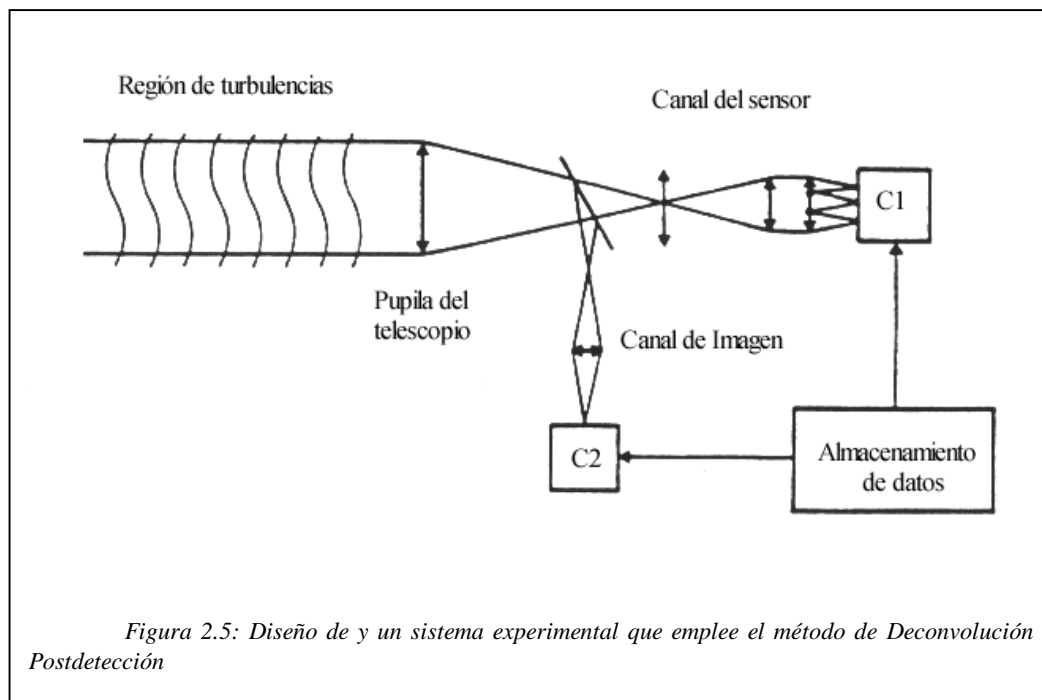


Figura 2.5: Diseño de un sistema experimental que emplee el método de Deconvolución Postdetección

La reconstrucción zonal del frente de onda se basa en la utilización de un modelo de diferencias de fase para las medidas de las pendientes del frente de onda {32}. Consiste en estimar los valores de la fase en una serie de puntos a partir de las medidas del gradiente obtenidas en otros puntos. Posteriormente si se requiere se interpolan o ajustan los datos para tener una expresión de la fase en todos los puntos de la pupila.

Por otra parte la reconstrucción modal se basa en la recuperación del frente de onda mediante la estimación de los coeficientes del desarrollo de la fase en un conjunto de funciones base, generalmente polinomios, suponiendo para ello un comportamiento analítico para la fase, lo que permitirá conocer la fase en cualquier punto de la pupila. Esta última será la que emplearemos en el simulador y describiremos en más detalle a continuación, {33}.

A partir de los datos del gradiente se pueden estimar directamente los valores de los coeficientes modales, de forma que la función de aproximación se ajuste lo mejor posible al valor de la fase de acuerdo con algún criterio predeterminado.

Un criterio útil consiste en minimizar, en promedio a las distintas realizaciones de la atmósfera, la diferencia cuadrática de fase real y estimada sobre la pupila del sistema {34}.

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi R^2} \int_{A_s} \langle [\psi(\rho) - \hat{\psi}(\rho)]^2 \rangle d\rho^2 \quad (2.5)$$

Considerando la fase incidente sobre la pupila como una suma infinita de polinomios de Zernike $\psi(\rho, \theta) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i Z_i(\rho, \theta)$ y la fase estimada como una suma de los

N primeros polinomios de Zernike, $\hat{\psi}(\rho, \theta) = \sum_{i=2}^N \hat{a}_i Z_i(\rho, \theta)$, gracias a la propiedad de

ortogonalidad de los polinomios, minimizar σ^2 es lo mismo que minimizar:

$$\langle [a_i - \hat{a}_i]^2 \rangle \quad (i = 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

La reconstrucción del frente de onda a partir de las medidas del gradiente se puede afrontar desde los conceptos típicos de la teoría de estimación lineal {35,59}. La estimación lineal consiste en estimar la función deseada partiendo de una relación lineal entre ésta y las medidas que se emplearán para estimar:

$$\hat{a}_i = \xi_i^T \cdot \vec{m} \quad (2.7)$$

donde ξ_i^T es el vector fila de la matriz de reconstrucción correspondiente al i -ésimo coeficiente, \vec{m} es el vector columna de medidas proporcionadas por el sensor y \hat{a}_i es la función a estimar, que en nuestro caso serán los coeficientes del desarrollo en serie de polinomios de Zernike de la perturbación de fase provocada por la turbulencia atmosférica.

La solución general a este problema se expresa por {60}:

$$\xi_i = G^{-1} F_i \quad (2.8)$$

donde :

$$F_{is} = \langle a_i m_s \rangle \quad (2.9)$$

$$G_{st} = \langle m_s m_t \rangle \quad (2.9)$$

siendo m_s , m_t las medidas correspondientes a las subpupilas s y t . El promedio se extiende a las distintas realizaciones de la atmósfera. Como ya hemos dicho anteriormente las medidas proporcionadas por el sensor Shack-Hartmann son proporcionales al gradiente promedio de la fase sobre cada subpupila. Así podemos escribir las medidas de forma analítica según {61}:

$$m_s = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} d^2x \nabla \psi(\vec{x}) + v_s \quad (2.10)$$

suponiendo que la irradiancia es constante en todos los puntos de la subpupila.

La expresión (2.10) nos va a permitir calcular analíticamente el valor de F_{is} y G_{st} {61}. Realizamos además las siguientes hipótesis usuales: el ruido de la subpupila s no está correlacionado con el ruido de la subpupila t y que los coeficientes modales no están correlacionados con el ruido. Así el cálculo de G_{st} se reduce a calcular:

$$G_{st} = \langle m_s m_t \rangle + \delta_{st} \sigma_v^2 \quad (2.11)$$

donde σ_v^2 es la varianza del ruido de las medidas y δ_{st} es la delta de Kronecker. Expresiones para la varianza del ruido se pueden encontrar en las referencias {63,64,65}.

Una vez estimados los coeficientes modales la reconstrucción del frente es inmediata, simplemente hay que sustituir su valor en la expresión de $\hat{\psi}(\rho, \theta)$. Una vez establecido la forma de obtener $\hat{\psi}(\rho, \theta)$, que actúa como una función de aberración presente en la pupila del sistema, estamos en condición de reconstruir la OTF del sistema *degradador* mediante las ecuaciones (1.50)(1.51) del capítulo I, lo que nos va a permitir *restaurar* la imagen mediante el proceso de restauración que nosotros escojamos.

2.3.3 Deconvolución de la imagen

Hasta ahora hemos presentado el proceso de adquisición de datos tanto en el canal de la imagen como en el canal del sensor. A continuación nos centraremos en el proceso de postprocesado. Primero realizaremos una pequeña introducción teórica a las técnicas de restauración y posteriormente describiremos su aplicación.

La técnica de deconvolución postdetección es una técnica que se puede emplear con éxito en el marco de los sistemas lineales invariantes espacialmente {37, 38}. El modelo de dichos sistemas fue expuesto en el capítulo 1.1.3. Entonces se estableció que la distribución de intensidad en el plano imagen $i(\bar{x})$ viene dada por la convolución de la

distribución de intensidad proporcionada por la óptica geométrica en el plano imagen $o(\vec{x})$, con la respuesta de impulso del sistema $h(\vec{x})$:

$$i(\vec{x}) = h(\vec{x}) \otimes o(\vec{x}) \quad (2.12)$$

Mediante el teorema de la convolución podemos pasar al plano de Fourier. En este plano la expresión anterior adquiere la forma:

$$I(\vec{f}) = H(\vec{f}) \cdot O(\vec{f}) \quad (2.13)$$

El proceso de *deconvolución* consiste en *estimar* el espectro del objeto a partir de la información que poseamos sobre la función de transferencia del sistema y el espectro de la imagen. Desde el punto de vista del tratamiento computacional de imagen el proceso de deconvolución es un método de *restauración* {39, 40, 41}, entendiéndose por restauración aquel proceso que trata de reconstruir o recuperar una imagen degradada basándose en algún conocimiento a priori sobre el proceso de degradación {42}.

El proceso de restauración consiste en un procesado de imagen que se realiza de forma computacional, es por esto que se hace necesario un modelo de degradación de carácter discreto. Supongamos así que $o(\vec{x})$ y $h(\vec{x})$ son dos funciones que se han muestreado uniformemente, de dimensiones $A \times B$ y $C \times D$. Trabajando en el marco de los sistemas lineales invariantes espacialmente podemos establecer el modelo de degradación mediante la siguiente expresión.

$$i = h \otimes o \quad (2.14)$$

donde i es la convolución discreta de h con o , siendo h la PSF del sistema y o la imagen sin degradar.

La formulación de la convolución discreta se basa en que las funciones muestreadas son periódicas. Al trabajar con convoluciones tendremos que operar con funciones ampliadas de dimensión $M \times N$, para evitar la superposición de los periodos individuales en la convolución resultante. La extensión de las funciones se realiza

completando con ceros cada dimensión hasta que el tamaño de la función ampliada sea superior o igual a la suma de las dimensiones de cada una de las funciones menos uno ($M \geq A+B-1$, $N \geq C+D-1$).

Para completar el modelo de degradación discreto se necesita añadir a la ecuación el término de ruido discreto de dimensión $M \times N$. De esta forma la expresión del modelo de degradación adquiere la expresión:

$$i = h \otimes o + n \quad (2.15)$$

donde i, o, n son funciones ampliadas ordenadas según un vector columna de dimensiones $(MN) \times 1$ y h es de dimensión $(MN) \times (MN)$. La ecuación anterior consiste en un sistema de MN ecuaciones lineales. Para hacernos una idea del extenso cálculo que implica resolver este sistema de ecuaciones, una imagen típica de 256×256 requiere la resolución de un sistema de 65536 ecuaciones {43}.

Aunque como vimos en el ejemplo anterior la resolución directa del sistema de ecuaciones por métodos algebraicos implica generalmente la manipulación de grandes sistemas de ecuaciones, se puede demostrar que si el sistema de degradación es lineal e invariante espacial y las imágenes son funciones extendidas periódicas, la complejidad del cálculo anterior se puede reducir al mismo nivel que se requería en las técnicas tradicionales de restauración en el dominio de la frecuencia, {44, 45}.

Una vez establecido el modelo de degradación retomamos el problema de estimación. Con la deconvolución o, de manera más general, restauración de una imagen, lo que se intenta es obtener una *estimación* del objeto no degradado que minimice un criterio de rendimiento predefinido {45, 46}. Al tratarse de un problema de estimación se puede emplear para su resolución la teoría de estimación lineal {46}. Nosotros nos centraremos por su sencillez en la estimación por mínimos cuadrados. Además esta

elección tiene la ventaja de proporcionar una aproximación general de la que derivan muchos de los métodos de restauración más conocidos².

La aproximación de mínimos cuadrados sin restricciones implica encontrar un \hat{o} tal que:

$$\|n\|^2 = \|i - h \otimes \hat{o}\|^2 \quad (2.16)$$

sea mínimo. La solución que se obtiene es:

$$\hat{o} = h^{-1} \otimes i \quad (2.17)$$

La resolución de esta expresión requiere un gran número de operaciones. Como dijimos con anterioridad la gran extensión de este cálculo se puede reducir hasta el mismo nivel que se requería en las técnicas tradicionales de restauración en el dominio de la frecuencia. Esta reducción se puede realizar gracias a que en el marco de los sistemas lineales invariantes espacialmente la matriz h se puede diagonalizar, siendo los elementos de la diagonal la transformada de Fourier discreta de la función ampliada h , y las matrices diagonalizadoras operadores que realizan la transformada de Fourier discreta. De esta forma la expresión anterior se puede expresar en el plano de Fourier como:

$$\hat{O} = \frac{I}{H} \quad (2.18)$$

expresión que corresponde al filtro inverso. La imagen restaurada se obtiene sin más que realizar sobre \hat{O} la transformada de Fourier inversa. La reducción de cálculo salta a la vista, pasamos de tener que realizar una convolución a realizar un producto elemento a elemento entre dos matrices.

A continuación mostramos una tabla con tres de los filtros más empleados en el marco de la técnica de deconvolución postdetección y los criterios de minimización de los que derivan.

² Estos métodos surgen de considerar una aproximación con o sin restricciones al problema de mínimos cuadrados{39}.

filtro regresivo	$\min \left\{ \sum_{j=1}^K I - \hat{I} ^2 \right\}$ <p>donde $\hat{I} = H\hat{O}$</p>	$\hat{O} = \frac{\sum_{j=1}^K H_j^* I_j}{\sum_{j=1}^K H_j ^2}$
filtro Wiener	$\min \left\{ \langle o - \hat{o} ^2 \rangle \right\}$ <p>donde $\hat{o} = h \otimes i$</p>	$\hat{O} = \frac{H^* I}{ H_j ^2 + \frac{S_n}{S_f}}$
filtro promedio de Wiener	$\min \left\{ \langle o - \hat{o} ^2 \rangle \right\}$ <p>donde $\hat{o} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K h_j \otimes i_j$</p>	$\hat{O} = \frac{\sum_{j=1}^K H_j^* I_j}{\sum_{j=1}^K H_j ^2 + \frac{S_n}{S_f}}$

tabla 2.1

El primero de los filtros presentados en la tabla 2.1 se corresponde con el filtro propuesto por Primot {23}, mientras que el tercero de los filtros corresponde al propuesto por Gonglewski {47}. El primer y tercer filtro proporcionan una única imagen mientras que el segundo filtro proporciona K imágenes restauradas, donde cada una de ellas minimiza el error cuadrático medio. Comentar también que el segundo y tercer filtro, son ambos filtros de Wiener. Ambos se diferencian en que mientras que en el segundo el promedio se extiende a distintas realizaciones del ruido para una imagen fija, en el tercero el promedio se realiza sobre las distintas imágenes registradas. Así para poder distinguir ambos filtros en apartados posteriores denotaremos al tercero de los filtros como *Filtro promedio de Wiener*. S_n y S_f son los espectros de potencia del ruido y de la imagen sin degradar evaluados sobre cada frecuencia espacial. La expresión obtenida tiene el

inconveniente de que tanto S_n como S_f son normalmente desconocidos, así en la práctica lo que se hace normalmente es aproximar el factor $\frac{S_n}{S_f}$ por una constante. Otra posibilidad consiste en calcular S_n a partir de la imagen degradada y S_f a partir de la imagen restaurada, introduciendo posteriormente su valor en el estimador de forma iterativa {47, 48}.

Nos parece interesante comentar el hecho de que en todos los casos presentados se consideró que la respuesta de impulso del sistema, y por tanto su función de transferencia, se conocían perfectamente, la OTF estimada era exactamente igual a la OTF real. Pero el caso de la técnica de deconvolución postdetección, así como en muchos otros en los que el proceso de degradación constituye un fenómeno aleatorio, este hecho no es cierto {49, 50, 51, 52, 53, 54}.

En la técnica de Deconvolución postdetección la función de degradación, consiste en el producto de la función de transferencia de la atmósfera por la función de transferencia del telescopio. Mientras que la OTF del telescopio se conoce analíticamente la OTF atmosférica se estima a partir de las medidas del gradiente de la fase del campo incidente sobre la pupila del sistema. Como se puede uno imaginar en este proceso se comete un cierto error de estimación. Por ello sería interesante introducir en el modelo de degradación el error que se comete al estimar la PSF, OTF, del sistema, aunque no lo haremos en este trabajo pues no es de nuestro interés en estos momentos establecer cual sería la influencia de esta modificación en las restauraciones. Claro está que en futuros trabajos trataremos de adentrarnos en el tema {49, 50, 51}.

Hasta ahora hemos realizado en este apartado una descripción teórica del proceso de degradación de la imagen y diseño del filtro restaurador. Trabajamos con respuestas de impulso y funciones de transferencia, pero de forma abstracta. Toca ahora describir el proceso de obtención de estas magnitudes.

En el apartado 2.3.2 fuimos capaces de reconstruir el frente de onda del campo incidente sobre la pupila del sistema. Suponiendo que en ausencia de distorsión el campo

incidente tendría un frente de ondas plano, se puede atribuir la aberración del frente al medio degradador, en el caso de observaciones astronómicas, la atmósfera. Trabajando bajo la hipótesis de campo cercano³ la función de transferencia del sistema atmósfera-telescopio se puede calcular a partir de la autocorrelación de la función pupila generalizada, ver apartado 1.2:

$$OTF = W(\vec{x}) \cdot e^{i\psi(\vec{x})} \otimes W(\vec{x}) \cdot e^{-i\psi(\vec{x})} \quad (2.19)$$

La función $\psi(\vec{x})$ representa la distorsión de fase acumulada por el campo óptico al propagarse por la atmósfera, que nosotros interpretaremos como si fuera introducida por la pupila del sistema. En nuestro caso tomaremos como $\psi(\vec{x})$ el frente reconstruido a partir de las medidas del sensor de frente de onda.

Así una vez estimada la OTF del sistema estamos en condiciones de llevar a cabo el proceso de deconvolución.

Hasta ahora hemos descrito la estadística de la perturbación que sufre un campo óptico al propagarse por la atmósfera, analizamos el proceso de formación de imagen, caracterizamos los efectos de la turbulencia atmosférica en la formación de imagen y presentamos distintas técnicas para superar dicha degradación. A continuación construiremos un simulador. El simulador se puede dividir en dos partes, una primera que permite simular imágenes degradadas por turbulencias atmosféricas y una segunda que implementa un sistema que emplea la técnica de Deconvolución Postdetección para restaurar las imágenes degradadas.

³ La atmósfera sólo afecta a la fase del campo óptico, y la distorsión introducida a lo largo de toda la atmósfera se puede concentrar en un película de fase equivalente que se supone colocada sobre la pupila del sistema [62].

CAPITULO III:

Diseño de un simulador de sistemas de Deconvolución Postdetección

En este capítulo vamos a describir el diseño de un simulador de un sistema de Deconvolución Postdetección. Esto supone el simular: la perturbación atmosférica; la OTF degradadora; la imagen degradada por la turbulencia atmosférica; el sensor de frente de onda, las medidas proporcionadas por el sensor; el ruido, tanto de las medidas del sensor como de la imagen degradada; las OTF's restauradora y del telescopio; y el proceso de obtención de la imagen restaurada.

El simulador que hemos implementado responde a la necesidad de evaluar sistemas astronómicos y procedimientos de deconvolución a posteriori de objetos extensos o puntuales, en base a datos proporcionados por sensores de frente de onda tipo Shack-Hartmann.

3.1 Descripción del simulador

Siguiendo el diagrama de flujo de la figura 3.1, podemos dividir el simulador en siete grandes bloques: 1) Módulo generador de fases aleatorias; 2) Sensor de frente de onda; 3) Módulo de reconstrucción del frente; 4) Telescopio; 5) Objeto; 6) Módulo generador de imágenes degradadas del objeto; 7) Módulo de deconvolución. Para un mejor seguimiento y comprensión del diseño realizado hemos configurado un diagrama de flujo en el que pretendimos presentar de forma clara y esquemática tanto cada uno de los elementos del simulador como las operaciones realizadas de mayor relevancia hacia el desarrollo del mismo.

El diseño del simulador lo empezamos por la Generación de fases aleatorias. El método que empleamos parte de considerar la perturbación de fase aleatoria como una combinación lineal de polinomios de Zernike. El carácter aleatorio de la fase se va a introducir en los coeficientes de la descomposición modal, generando estos a partir de la matriz de covarianza de los coeficientes modales $\{1\}$.

El segundo elemento del simulador que diseñamos fue el sensor de frente de onda (en nuestra simulación, un Shack-Hartmann). El diseño del sensor no solo consistió en simular el frente existente en cada subpupila a partir del frente simulado sobre la pupila del telescopio, sino que también incluyó la simulación del patrón de irradiancia proporcionado por cada subpupila sobre su plano focal, mediante la resolución numérica de la integral de difracción. Posteriormente aprovechamos dichos patrones de irradiancia para calcular la distribución de probabilidad de impacto de los fotones en el plano focal de las subpupilas para poder simular correctamente el ruido fotónico asociado al flujo fotónico incidente.

Después de simular el frente y el sensor, implementamos el proceso de reconstrucción del frente perturbado, el cual involucra al vector columna de medidas proporcionado por el sensor y a la matriz de reconstrucción. Como resultado de este proceso obtendremos los coeficientes estimados del desarrollo en serie de polinomios de

Zernike de la perturbación de fase, a partir de los cuales vamos a poder realizar la reconstrucción del frente.

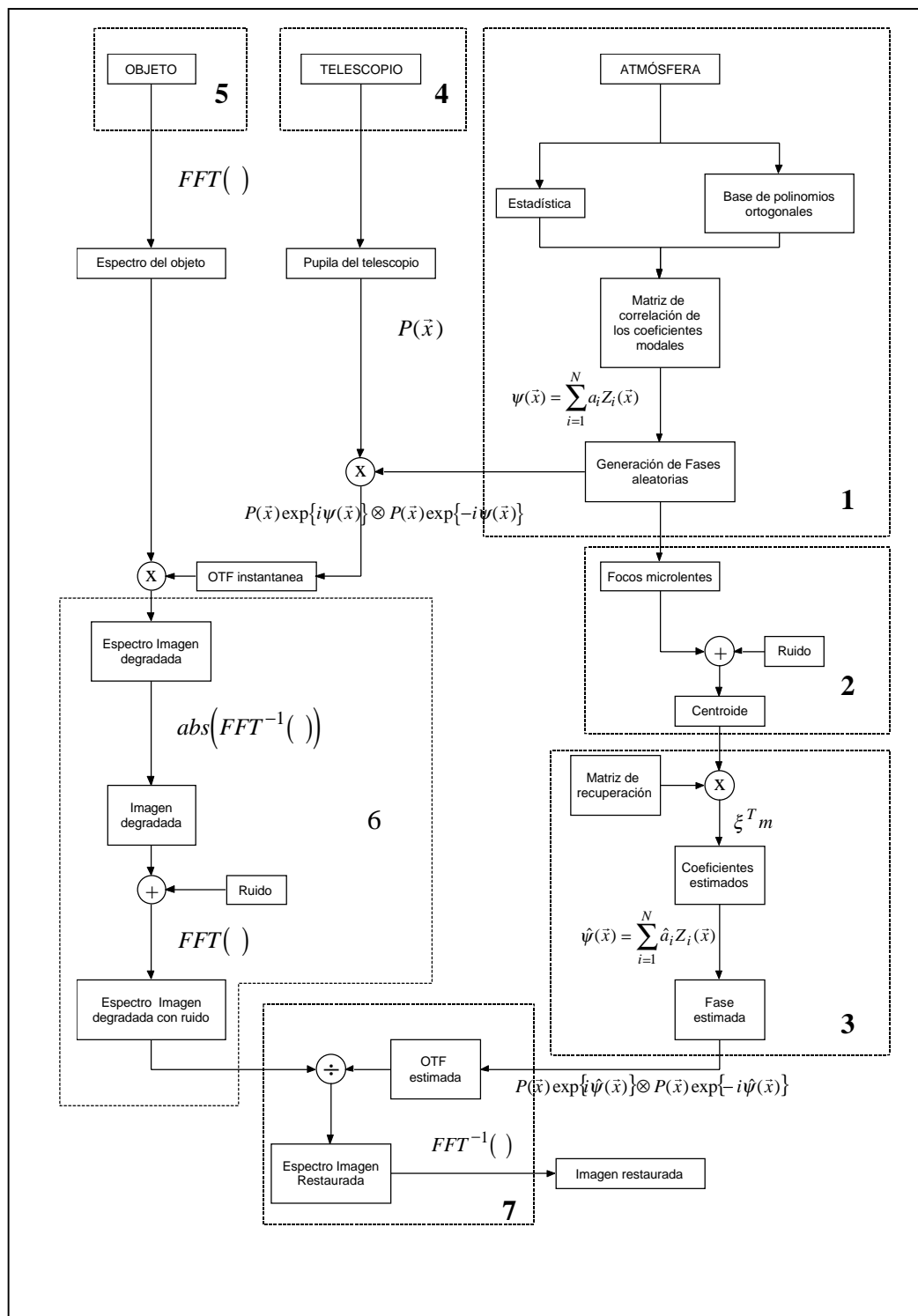
Una vez implementadas la generación, medida, y estimación de las perturbaciones de fase aleatorias, pasamos a simular la pupila del telescopio, para así poder continuar con la simulación de los procesos de degradación y restauración de la imagen. Podemos avanzar que la simulación de la pupila, va a consistir en dibujar una región circular de unos sobre una malla cuadrada de ceros. Veremos que el tamaño relativo de la región de unos respecto al tamaño de la malla cuadrada sobre la que se dibuja, va a venir determinado por las características de nuestro sistema de adquisición de imagen, tanto por el telescopio como por la cámara CCD.

El proceso de degradación consiste básicamente en hacer pasar el campo procedente del objeto a través de la turbulencia atmosférica y del telescopio. Matemáticamente esto se puede implementar en el espacio de Fourier sin más que multiplicar el espectro del objeto por la OTF del sistema telescopio-atmósfera. Es en la simulación de la OTF del sistema donde emplearemos la pupila del telescopio anteriormente simulada. Asimismo simularemos la existencia de ruido fotónico en la imagen siguiendo el mismo método empleado en la simulación de las medidas proporcionadas por el sensor.

La restauración consistirá en estimar el objeto de interés en base a un criterio predefinido, a partir del conocimiento que poseamos sobre el sistema que produce la degradación.

Por último simularemos el objeto. Para nuestra simulación los objetos empleados consistieron en una estrella binaria simulada y una sección del cielo en la que existiese un conjunto de estrellas.

A continuación describiremos con mayor profundidad cada uno de los bloques anteriormente presentados. Primero realizaremos una descripción general en la que presentaremos la matemática y los conceptos empleados. Y posteriormente presentaremos los datos empleados en nuestra simulación.



3.1.1 Generación de la distorsión de fase sobre la apertura del sistema

La generación de la perturbación de fase que introduciría una atmósfera real necesita algún tipo de información sobre la estadística de la perturbación, para asegurar así un elevado grado de exactitud en la simulación. En nuestro simulador la información de la que partimos es la matriz de covarianza de los coeficientes modales del desarrollo en serie de polinomios de Zernike de la perturbación de fase atmosférica. Para el cálculo de la matriz de covarianza empleamos la expresión (1.33). Como mencionamos en el primer capítulo los coeficientes modales del desarrollo en serie se van a considerar variables aleatorias gaussianas de media cero y varianza dada por la matriz de covarianza de Noll {2}. Pero la matriz de covarianza propuesta por Noll no es diagonal, esto indica que los polinomios de Zernike no son en términos de economía estadística, los mejores polinomios para describir la perturbación de fase atmosférica. Introducimos así los polinomios de Karhunen-Loeve, que tienen como característica principal que la matriz de covarianza de los coeficientes modales es diagonal {1, 3}. El gran inconveniente es que estos polinomios carecen de expresión analítica. Surge entonces el problema de establecer como generar los coeficientes de Karhunen-Loeve. Para ello seguiremos el procedimiento propuesto por N.Roddier {1}.

El procedimiento desarrollado por Roddier se basa en que la matriz de Noll es hermítica. Si una matriz C es hermítica debe existir una matriz unitaria ($U^{-1} = U^T$) tal que $U^T C U$ sea diagonal. Aplicando el algoritmo de SVD {9}, sobre la matriz de covarianza de los coeficientes modales obtenemos $C = X S X^T$ donde S es una matriz diagonal y X es la matriz unitaria.

La matriz de covarianza se calcula según $C = \langle A A^T \rangle$ donde A es un vector columna que contiene los coeficientes modales del desarrollo en polinomios de Zernike y $\langle \rangle$ indica promedio a las distintas realizaciones de la atmósfera. Definamos por otra

parte el vector columna $B = U^T A$. La matriz de covarianza de los coeficientes de B se calcula $E = \langle BB^T \rangle$. Sustituyendo en esta expresión la definición de B se observa :

$$E = \langle BB^T \rangle = \langle U^T AA^T U \rangle = U^T \langle AA^T \rangle U = S \quad (3.1)$$

Así comprobamos que E es una matriz diagonal con lo que se consigue que las componentes de B sean no correlacionadas y estadísticamente independientes. Las componentes de B son los coeficientes modales del desarrollo en serie en polinomios de Karhunen-Loève.

Obtenemos de este manera la forma de obtener los coeficientes modales del desarrollo en polinomios de Zernike a partir de los coeficientes del desarrollo en polinomios de Karhunen-Loève:

$$A = UB \quad (3.2)$$

Así para simular los frentes procedimos de la siguiente forma: 1) calculamos la matriz de covarianza de los coeficientes modales según la expresión (1.33); 2) mediante un algoritmo realizamos la SVD de la matriz de covarianza; 3) nos quedamos con la matriz unitaria U y la matriz diagonal S ; 4) empleamos la matriz diagonal para generar números que sigan una estadística gaussiana de media cero y desviación dada por los elementos de la matriz diagonal; 5) multiplicamos el vector columna de números aleatorios generados por la matriz unitaria U y ya tenemos generados los coeficientes aleatorios del desarrollo en serie de polinomios de Zernike.

El método de simulación empleado tiene la limitación de que permite trabajar con un número limitado de coeficientes modales. Así pues la fase generada en vez de ser el resultado de la combinación lineal de infinitos polinomios de Zernike, se obtiene de realizar una suma finita. Este truncado del sumatorio limita la precisión de la simulación, siendo esta mayor cuantos más modos impliquemos en el cómputo.

Existen otros métodos de simulación de fases aleatorias que permiten trabajar con infinitos polinomios, aunque nosotros escogimos el método anteriormente presentado, principalmente por su sencillez conceptual y computacional [11]. Además a pesar de su limitación este método permite simular con gran exactitud la perturbación de fase introducida por la turbulencia atmosférica.

En nuestra simulación extendimos el desarrollo en serie de la fase hasta el polinomio de orden 200, en el caso de la fase simulada que consideramos desconocida y hasta orden 100 para la fase estimada. La simulación de las distorsiones de fase la realizamos para tres valores distintos del parámetro de Fried normalizado a D (diámetro del telescopio), $r_{0n} = 0.2, 0.1, 0.05$.

3.1.2 Canal de la imagen

El canal de la imagen del sistema astronómico que vamos a simular constará únicamente de telescopio y cámara CCD, de tal forma que la función de transferencia del sistema se reduzca a la OTF del sistema atmósfera-telescopio.

Consideraremos que antes de formar imagen se encuentra un divisor de haz que reparte la radiación que incide sobre él entre los canales del sensor y de la imagen en un 50%.

3.1.2.1 Computo de OTF

Como ya hemos expuesto en el capítulo 1, la OTF es la autocorrelación de la pupila de salida del sistema. Dicha definición se expresa matemáticamente según la expresión (1.50).

Computacionalmente, en el caso de que la función que se autocorrelaciona este definida sobre un elevado número de píxeles, la autocorrelación de suele realizar empleando el teorema de la convolución. Así calcularemos la OTF del sistema atmósfera-telescopio mediante la expresión:

$$OTF = F^{-1} \left[F \left[\tilde{P}(x, y) \right] \cdot F^* \left[\tilde{P}(x, y) \right] \right] \quad (3.3)$$

donde $\tilde{P}(x, y)$ es la función pupila generalizada, F indica transformada de Fourier y $*$ indica complejo conjugado.

$$\tilde{P}(x, y) = P(x, y) \exp\{j\psi(x, y)\} \quad (3.4)$$

$\psi(x, y)$ representa la distorsión de fase introducida por la perturbación atmosférica, y se obtiene según:

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N a_i Z_i(\vec{x}) \quad (3.5)$$

donde a_i es el coeficiente modal, simulado mediante el algoritmo propuesto en el apartado anterior, correspondiente al i -ésimo polinomio y tiene dimensiones de radianes, ya que $Z_i(\vec{x})$, i -ésimo polinomio de Zernike, se emplea en unidades normalizadas al radio del telescopio. Como mencionamos en el apartado anterior N será 200 para la fase simulada desconocida y $N=100$ para la fase estimada.

Según queramos computar la OTF del sistema atmósfera-telescopio para degradar o restaurar emplearemos o bien $\psi(\vec{x})$, o $\hat{\psi}(\vec{x})$ respectivamente en la definición de la pupila generalizada (3.5).

Un paso necesario para realizar el cómputo de la OTF consiste en determinar el tamaño de la pupila de salida del sistema sobre la malla de píxeles con la que vamos a trabajar. Así dicho parece sencillo, pero ¿Cómo relacionamos el plano de la pupila con el plano de la CCD ?. La relación entre ambos planos se obtiene de comparar la expresión de la transformada de Fourier discreta con la expresión de la transformada de Fourier

continua. Para una mejor comprensión y seguimiento realizaremos la comparación para el caso unidimensional.

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp\left\{-i2\pi \frac{kn}{N}\right\} \\ \hat{g}(x_1) &= \int_{\Pi_o} g(x_o) \exp\left\{-i2\pi \frac{x_o x_1}{\lambda f}\right\} dx_o\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde n y x_o son coordenadas discreta y continua del plano de la pupila, k_1 y x_1 son coordenadas discreta y continua del plano imagen, N es la dimensión de la función extendida y Π_o hace referencia al plano de la pupila. Por otra parte λ es la longitud de onda asociada al campo óptico incidente y f es la focal del telescopio. Comparando los exponentes de los núcleos de las integrales discreta y continua llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{kn}{N} = \frac{x_o x_1}{\lambda f}\tag{3.7}$$

Esta expresión va a servir para proporcionar dimensiones de longitud a los pixeles. Así fijamos el tamaño del pixel en el plano Π_1 , plano imagen, y lo denotamos m_1 . De esta forma expresamos las coordenadas del plano de la CCD como un producto entre el número de pixel y la unidad de longitud del pixel:

$$x_1 = k \cdot m_1\tag{3.8}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior llegamos a:

$$\begin{aligned}x_o &= n \cdot m_o \\ m_o &= \frac{\lambda f}{Nm_1}\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde m_o es el tamaño del pixel en el plano Π_o , plano correspondiente al plano en el que se encuentra la pupila del sistema. Imponiendo la condición $x_o = D$, obtenemos que el diámetro del telescopio en píxeles viene dado por:

$$n_D = \frac{DNm_1}{\lambda f} \quad (3.10)$$

Llegados a este punto tendríamos todas las expresiones necesarias para poder realizar la simulación. Pero, ¿Cómo escoger el valor de m_1 ? Si escogemos un tamaño de pixel grande, nos puede suceder que entre en él toda la PSF, lo que impediría visualizarla correctamente. Por otra parte si escogemos el tamaño del pixel de la CCD muy pequeño puede ocurrir que estemos muestreando en exceso la PSF y ocupe de esta forma casi toda la imagen. Lo ideal sería tener una expresión que nos ayudara a escoger de forma aproximada el número de píxeles que ocupa la PSF, con lo que tendríamos total dominio sobre la simulación. Así definimos la siguiente igualdad:

$$q \cdot m_1 = \frac{\lambda f}{D} \quad (3.11)$$

siendo q un número entero. La expresión (3.11) permite determinar m_1 en función del número aproximado de píxeles que queremos que ocupe la PSF.

Conociendo la expresión que nos da la distancia ρ a la que se produce el primer cero de la PSF respecto al máximo central:

$$\rho = 1.22 \frac{\lambda f}{D} \quad (3.12)$$

y escogiendo por ejemplo $q=3$ obtenemos que el primer cero de la PSF del sistema que vamos a simular se produce a 3.66 píxeles del máximo central, valor que permite visualizar correctamente la PSF del sistema sin ocupar demasiados píxeles.

Profundizando un poco más en las expresiones anteriormente expuestas comprobamos que introduciendo (3.10) en (3.11) llegamos a una expresión muy sencilla

y de gran interés, pues proporciona el diámetro del telescopio en píxeles n_D , en función del número de píxeles de la malla sobre la que se va a simular la pupila del telescopio N y el número aproximado de píxeles que queremos que ocupe la PSF, q :

$$n_D = \frac{N}{q} \quad (3.13)$$

Así sin más que emplear la expresión (3.13) podemos simular cualquier telescopio cuya PSF tenga un máximo central cuyo radio sea aproximadamente de q píxeles. El resto de las expresiones (3.8)-(3.12) sirven para poder dar valores concretos a los distintos parámetros involucrados en el simulador, ya sea el diámetro y la focal del telescopio, la longitud de onda o el tamaño del pixel. El concretar los valores de estos parámetros permite realizar una simulación más completa, ya que de esta forma podremos saber cuanto ocupa un pixel en el plano objeto y en el plano imagen, datos necesarios para poder decir, en nuestro caso, cual es la separación angular entre dos estrellas, o más sencillo aún saber cual es el campo de visión de nuestro telescopio.

En nuestro caso particular escogimos el diámetro del telescopio D y la longitud de onda de trabajo λ , como parámetros a partir de los cuales obtener el resto, mediante las expresiones anteriormente presentadas. Imponemos que el diámetro de la pupila del telescopio fuera $D = 2\text{ m}$ y $\lambda = 0.5\text{ micras}$. Un telescopio de estas características va a proporcionar una PSF cuya ancho angular a altura mitad va a ser de 0.06 arcsec^1 .

Imponemos $q=3$ píxeles, de forma que cada pixel ocupa un campo de 0.017 arcsec (cogiendo $\text{FWHM} \approx \rho$). Este valor liga la focal del telescopio con el tamaño del pixel. Los valores que nosotros escogimos de las posibles combinaciones existentes son: focal efectiva $f = 84\text{ m}$ y tamaño de pixel, $m_1 = 7\text{ micras}$.

Para poder calcular el tamaño del pixel en el plano de la pupila del sistema nos falta determinar el tamaño de la malla de píxeles con la que vamos a trabajar. Decidimos emplear una malla de 128×128 píxeles para simular la imagen recogida por nuestro

¹ $1\text{ arcsec} = 5 \cdot 10^{-6}\text{ radianes}$

sistema de adquisición y la pupila del telescopio y para realizar las operaciones el plano de Fourier decidimos que las funciones extendidas correspondientes tuvieran el tamaño de 256×256 .

Sustituyendo los parámetros presentados en la expresión anterior obtenemos el tamaño del pixel en el plano de la pupila $m_o = 2.34$ cm. Una vez obtenido el valor de este parámetro la obtención del tamaño del diámetro de la pupila del telescopio en píxeles es inmediata, $n_D = 85$.

Una vez determinado el diámetro en píxeles de la pupila del telescopio, para la simulación de la OTF del sistema telescopio-atmósfera sólo tenemos que colocar la pantalla de fase sobre la pupila del telescopio y operar. Es importante recordar que los polinomios de Zernike están normalizados al radio de la pupila sobre la que se describen. Así para aplicar el formalismo presentado para al cálculo de la OTF tenemos que acordarnos de normalizar la coordenada radial de los polinomios de Zernike que se van a usar como base, al radio de la pupila del telescopio.

3.1.2.2 Simulación de la imagen

Trabajaremos con dos imágenes típicas de observaciones astronómicas, una imagen de una estrella doble y una imagen de un conjunto de estrellas. La imagen artificial de la estrella doble que empleamos en la simulación consiste en dos patrones de airy que simulan dos estrellas, con una separación angular de 0.28 arcsec. La imagen del conjunto de estrellas, en vez de simularla situando círculos sobre un fondo negro, la simulamos partiendo de una imagen real, aunque a la hora de trabajar con ella para nosotros es simplemente una imagen simulada que no representa ninguna región del espacio en concreto. La imagen de la que partimos para simular el conjunto de estrellas es una sección de 128×128 píxeles de una foto de NGC5904. Escogimos esta imagen por presentar un conjunto de estrellas de distinta magnitud, lo cual nos va a permitir observar

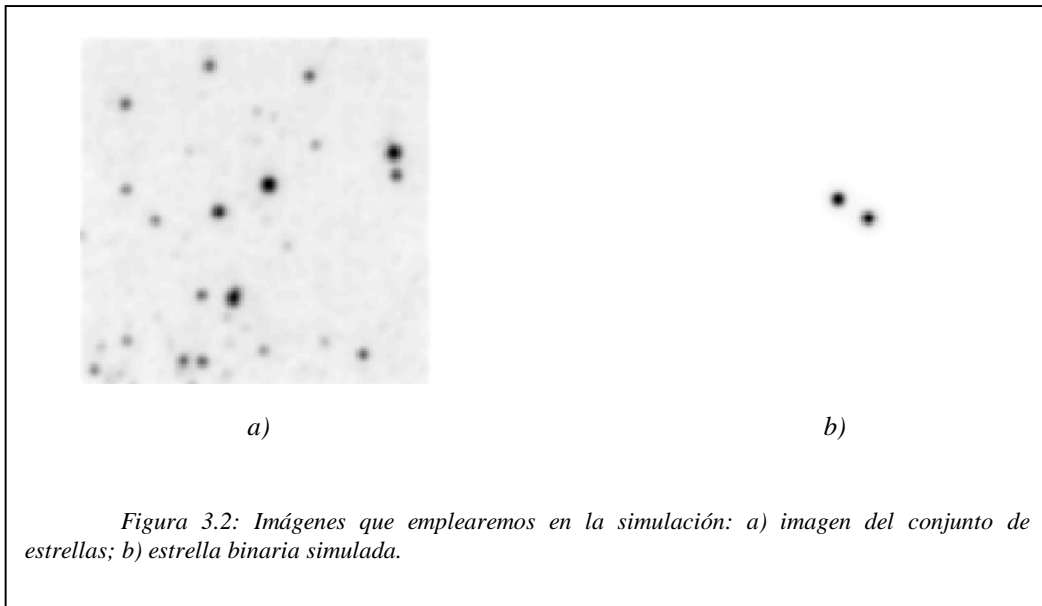
como afecta la turbulencia atmosférica a las imágenes de las estrellas dependiendo de sus magnitudes. La longitud de onda de trabajo será de 0.5 micras .

En base a los valores escogidos para nuestro telescopio las imágenes van a tener un campo de $2.17 \times 2.17 \text{ arcsec}$. Tenemos que comentar el hecho de que la sección escogida de los alrededores de NGC5904 en la foto original, de la que sacamos la sección con la que vamos a trabajar, tiene unas dimensiones reales de 219 arcsec , con lo que cada pixel original ocupa angularmente 1.71 arcsec . Para esta simulación la hemos reescalado, de forma que el trabajar con un ancho angular de pixel de 0.017 arcsec nos va a permitir observar con claridad el efecto degradador de la turbulencia atmósfera, lo cual no podríamos conseguir si hubiéramos trabajado con el ancho original de 1.71 arcsec .

Escogimos además que la imagen con la que nosotros trabajamos poseyese una magnitud visual acumulada 10. Este hecho junto con la elección del tiempo de integración de la CCD igual a 5 ms va a determinar que el número de fotones que llegan a nuestra CCD tras ser captados por el telescopio sea 1869 fotones , suponiendo eficiencia cuántica del detector igual a 1 y nulos los efectos de absorción en la atmósfera y en el telescopio.

3.1.2.3 Computo ruido fotónico

El ruido de Poisson en la imagen lo simularemos de la siguiente forma. Partiendo de la imagen degradar sin ruido sumaremos el valor del nivel de gris de todos los píxeles. Dividiremos la imagen por el valor de la suma. Esto nos proporcionará la densidad de probabilidad de impacto sobre cada pixel de la CCD. Después multiplicaremos la distribución de probabilidad de impacto por el número de fotones que consideramos que llegan al telescopio. Así podremos simular el ruido fotónico considerando el valor de cada pixel como el numero de fotones medio que llega a cada pixel e introduciendo dichos valores en un generador de números aleatorios que siga la distribución de Poisson.



3.1.2.4 Degradación y Restauración

La imagen degradada se obtiene de convolucionar la PSF del sistema atmósfera-telescopio con la imagen sin degradar. Esta convolución la realizamos mediante el algoritmo de la FFT en el plano de Fourier.

El proceso completo consiste en: realizar la transformada de Fourier de la imagen del objeto sin degradar. Multiplicar por la OTF del sistema atmósfera-telescopio y realizar la transformada de Fourier inversa y quedarse con el valor absoluto. Alguien se preguntará por que quedarse con el valor absoluto. La razón es que la imagen degradada tiene que ser real y con el método de cálculo empleado nos quedaba un residuo imaginario, que creemos es ocasionado por errores de precisión en el cálculo de las transformadas de Fourier. Así pues podíamos quedarnos con la parte real de la imagen, o como es el caso, escoger quedarse con el valor absoluto.

Una vez simulada la imagen degradada introdujimos el ruido fotónico (ver apartado 3.1.3.3) asociado al flujo fotónico empleado.

Para simular el proceso de deconvolución (restauración de la imagen degradada por la turbulencia atmosférica y por el ruido fotónico) calculamos su transformada de Fourier y empleamos los algoritmos presentados en la tabla 2.3.1, empleando como función de transferencia en dichos algoritmos la OTF atmosférica estimada, ver apartado 3.1.3.1 para una descripción de como construir la OTF estimada. Posteriormente realizamos la transformada de Fourier inversa para obtener la imagen restaurada y nos quedamos con el valor absoluto.

La intención de restaurar con tres filtros distintos es la de establecer una comparación entre ellos y determinar cual es el más efectivo al ser aplicado a las imágenes escogidas.

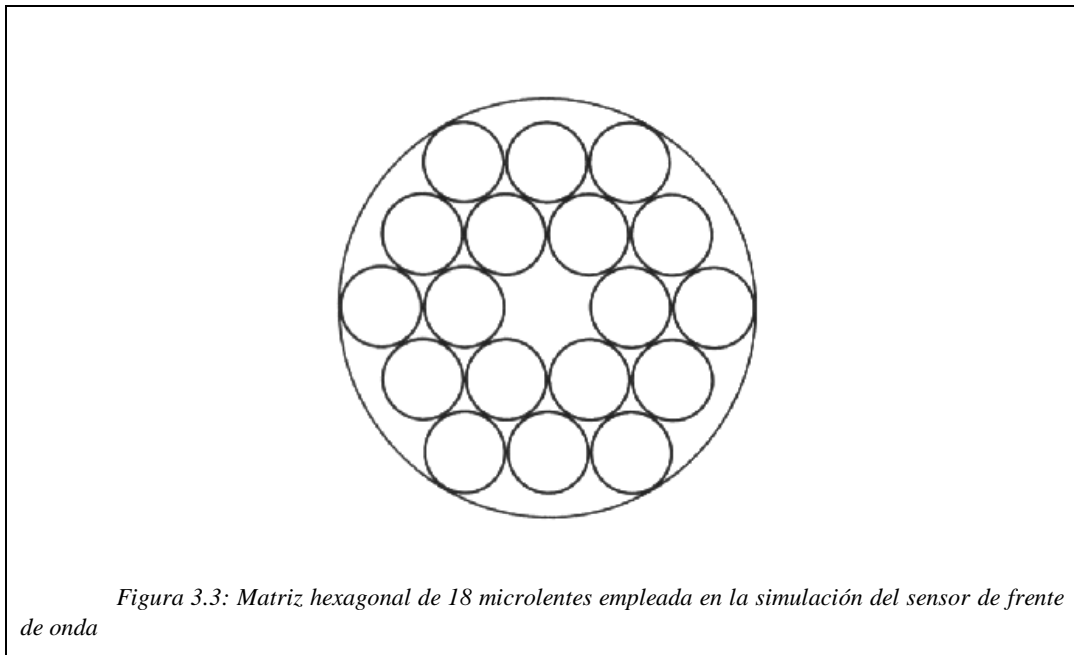
Siguiendo el algoritmo presentado en el apartado 3.1.3.1 para la simulación de la OTF, estamos simulando la OTF del sistema telescopio-atmósfera, ya que estamos calculando la función de transferencia asociada a la pupila generalizada del sistema, la cual lleva información tanto de la atmósfera, a través de la pantalla de fase, como de la pupila, al definir la pantalla de fase sobre el círculo que simula la pupila del sistema. Pero nosotros queremos compensar únicamente la degradación introducida por la atmósfera. Entonces queremos generar la OTF estimada de la atmósfera. Para ello seguiremos el algoritmo propuesto en el apartado 3.1.3.1, generando primero la OTF estimada del conjunto telescopio-atmósfera y luego dividiremos por la OTF del telescopio, obteniendo finalmente la OTF estimada deseada. La simulación de la OTF atmosférica estimada se hizo así porque los polinomios de Zernike empleados en la simulación de la pantalla de fase se tienen que definir sobre la pupila del sistema.

La motivación que nos lleva a restaurar únicamente la degradación introducida por el telescopio es nuestro interés en evaluar la degradación producida por la atmósfera y el grado de restauración que se puede alcanzar compensando únicamente la degradación introducida por ésta, independientemente de la producida por el telescopio.

3.2.1 Canal del sensor de frente de onda

Para utilizar un sensor Shack-Hartmann de dimensiones razonables es necesario comprimir y transportar el frente de onda que incide sobre la pupila del telescopio hasta el plano en el que está situado el sensor de frente de onda. Este trabajo lo realiza un sistema de relé que suele consistir en un conjunto de lentes. En nuestra simulación partiremos del supuesto que estas lentes son capaces de transportar el frente sin introducir ningún tipo de aberración, simplemente reescalando las coordenadas transversales. Bajo esta perspectiva la simulación se centra en implementar directamente el sensor de frente de onda.

En la simulación que hemos realizado se ha empleado un sensor de frente de onda tipo Shack-Hartmann. Se ha trabajado con una matriz de microlentes circulares en red hexagonal de 18 *subpupilas* cada una de las cuales tiene un diámetro proyectado sobre la pupila del sistema de 0.2 veces el diámetro del telescopio y $f/\# = 80$. La longitud de onda de trabajo del sensor es de 0.5 micras.



La simulación de las medidas se ha realizado de la siguiente forma; 1) proyectamos la matriz de microlentes sobre la pupila del telescopio; 2) simulamos el frente sobre la pupila del telescopio; 3) determinamos que parte del frente recoge cada subpupila; 4) calculamos la integral de difracción asociada al campo óptico incidente, que pasa a través de la subpupila, de amplitud constante y fase igual a la fase existente sobre la subpupila; 5) Calculamos el centroide empleando la expresión (3.15).

La integral de difracción la evaluaremos mediante el algoritmo integral de Hopkins [10]. Este método se utiliza de la siguiente forma. El dominio de integración se divide en subdominios rectangulares en cada uno de los cuales la fase de la función se expande en una serie de Taylor entorno al centro del subdominio, quedándonos a primer orden, y considerando que el módulo de la función es constante en cada subdominio e igual al valor de éste en el centro del mismo. La contribución de cada subdominio tiene entonces solución analítica. La integral se evalúa sumando la contribución de todos los subdominios. En nuestra simulación realizamos la integral dividiendo el dominio de integración, en el plano de coordenadas $\rho - \theta$, en subdominios rectangulares de igual tamaño. En el plano de coordenadas $x - y$, los subdominios rectangulares se transforman en secciones de igual ancho angular e igual largo en la dirección radial.

A continuación presentamos las expresiones obtenidas para la realización de la integral de difracción del campo mediante el algoritmo integral de Hopkins. La integral que tenemos que evaluar es la integral de difracción de un campo que atraviesa una lente de focal f :

$$U(x_o, y_o) = \int_{A_s} \exp\{i\phi_z(x_1, y_1)\} \exp\left\{-i \frac{k}{2f} (x_1^2 + y_1^2)\right\} \exp\left\{i \frac{k}{2z} ((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2)\right\} dx_1 dy_1 \quad (3.13)$$

donde: $U(x_1, y_1) = \exp\{i\phi_z(x_1, y_1)\}$ siendo $\phi_z(\rho_z, \theta_z) = \sum_{i=2}^N a_i \cdot Z_i(\rho_z, \theta_z)$, es el campo incidente.

Empleando el algoritmo integral de Hopkins la expresión que hay que resolver es:

$$U(\rho_o, \theta_o) = \exp\left\{i \frac{k}{2z} \rho_o^2\right\} \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho_p \Delta \rho_p \Delta \theta_p \exp\left\{i \hat{\phi}(\rho_p, \theta_p)\right\} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Delta \rho_p}{2} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \rho_p} \Big|_{(\rho_p, \theta_p)}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Delta \theta_p}{2} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta_p} \Big|_{(\rho_p, \theta_p)}\right) \quad (3.14)$$

donde: ρ_p , θ_p las coordenadas radial y angular en el plano de la pupila; ρ_o , θ_o las coordenadas del plano de observación, plano de la CCD; ρ_z , θ_z las coordenadas de los polinomios de Zernike definidos sobre la pupila del sistema. La presentación de todas las expresiones involucradas la realizamos en el Apéndice A.

Calculamos $U(x_o, y_o)$ en una malla de 25x25 puntos en el plano de la CCD empleando para la integración una malla de 20x20 subdominios en el plano de la subpupila. Se comprobó que mallas de mayor número de puntos en ambos planos no proporcionaban resultados sustancialmente superiores en relación con el tiempo de computación ahorrado.

La simulación de la obtención de las medidas proporcionadas por el sensor Shack-Hartmann en presencia de ruido fotónico se realizó de la misma manera que en el caso de simular la imagen degradada con ruido fotónico. En este caso se trabajó con un número de 75 fotones por subpupila por tiempo de integración procedentes de una estrella guía láser de magnitud visual 10. La elección de este flujo fotónico no fue del todo arbitraria. Comprobamos que si el flujo era mayor de 100 fotones por subpupila por tiempo de integración los efectos debidos al ruido que debería producir el trabajar con un número limitado de fotones no se hacían relevantes y si el número de fotones era muy pequeño los efectos del ruido en la restauración eran dominantes sobre el efecto de la turbulencia. Así pues escogimos un flujo fotónico que hacia que los efectos de la turbulencia atmosférica y el ruido fotónico fueran comparables.

Una vez generadas las medidas que produciría el sensor se obtuvieron las coordenadas x , y de los centroides de la imagen de cada subpupila mediante la expresión del cálculo del centroide discreta {4}.

$$x_{ck} = \frac{\sum_{i,j=1}^{25} x_{jk} I_{ijk}}{\sum_{i,j=1}^{25} I_{ijk}} \quad y_{ck} = \frac{\sum_{i,j=1}^{25} y_{ik} I_{ijk}}{\sum_{i,j=1}^{25} I_{ijk}} \quad (3.15)$$

donde x_{jk} es la posición del pixel respecto a un eje de coordenadas centrado en la posición de referencia del centroide de la k -ésima microlente, e I_{ijk} es la distribución de irradiancia proporcionada por la k -ésima subpupila en una región sobre la región asociada .

Las coordenadas de los centroides se dispusieron de forma convenientemente ordenada en un vector columna. Primero se colocaron todas las coordenadas x ordenadas según la subpupila a la que pertenecieran, luego se colocaron las coordenadas y , también de forma ordenada. Los coeficientes modales estimados, del desarrollo de la fase en polinomios de Zernike, se obtuvieron a partir de la multiplicación del vector columna de medidas por la matriz de reconstrucción {5,6}.

Una vez obtenidos los coeficientes modales estimados a partir de las medidas se procede a la generación de la fase estimada, la cual se construye a partir de la expresión (3.5) sustituyendo a_i por \hat{a}_i , coeficientes estimados. A partir de la fase empleando (3.3) y (3.4) generaremos la OTF estimada. Resaltar que la OTF estimada se generará considerando únicamente los primeros 100 elementos del desarrollo en serie en polinomios de Zernike de la perturbación de fase acumulada por el campo óptico al propagarse por la atmósfera. El empleo de un menor número de polinomios en la generación de la OTF estimada se debe a nuestro interés en simular un caso real en el que

el número de modos recuperados es siempre inferior al número de modos presentes en el frente.

3.2 Parámetros de calidad del simulador

Una vez diseñado e implementado el simulador tenemos que comprobar la exactitud del procedimiento empleado. Esta comprobación se puede dividir en dos partes: 1) comprobación de la representación de la estadística de la perturbación de fase producida sobre un campo óptico por la turbulencia atmosférica al propagarse éste a través de ella; 2) comprobación de la correcta simulación del sensor Shack-Hartmann.

3.2.1 Comprobación de la estadística de la fase simulada

Emplearemos para la comprobación de la correcta simulación de la perturbación de fase parámetros de carácter estadístico. Así emplearemos como elementos de contraste: la expresión de la función de estructura de fase simulada; la matriz de covarianza de los 10 primeros polinomios de Zernike; y el error cuadrático medio de la fase perturbada sobre la pupila en función del número de modos corregidos.

En el capítulo 1 definimos la función de estructura de fase (1.17), y presentamos su expresión analítica para el caso de que el espectro de potencias de la turbulencia se describiese empleando el modelo propuesto por Kolmogorov, (1.20):

$$D_{\psi}(\Delta\vec{x}) = 6.88 \left(\frac{|\Delta\vec{x}|}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (3.16)$$

Evaluaremos numéricamente la expresión (1.17) empleando los frentes que simulamos y la ajustaremos a una función del tipo $a \cdot x^b$ donde a y b son los

coeficientes que obtendremos del ajuste. Compararemos la expresión proporcionada por el ajuste con (3.16). Este será nuestro primer elemento de contraste. La evaluación numérica de la función de estructura de fase la realizaremos de la siguiente forma. Comenzamos definiendo una malla cuadrada de puntos sobre la pupila del sistema, Luego calculamos la fase sobre los puntos generados. Una vez generada la fase procedimos al cálculo de la función de estructura de fase mediante el empleo de la expresión (1.17). Como la función de estructura de fase no depende de la dirección, sino que sólo depende de la separación entre puntos, decidimos realizar un promediado sobre distintas posiciones para cada frente simulado. Así considerando la malla de puntos simulados como una matriz, realizamos el cálculo de la función de estructura de fase primero en cada columna por separado y luego promediamos sobre las distintas columnas. Posteriormente realizamos el mismo tipo de análisis sobre las filas. El cálculo de la función de estructura de fase lo realizamos restando al primero y último elemento de la fila o columna el resto de los puntos y elevando al cuadrado la diferencia. Este tipo de análisis nos permitió realizar un promedio, para cada frente simulado, sobre las distintas direcciones. También calculamos la función de estructura de fase para la diagonal de la malla de puntos El proceso de cálculo se realizó sobre 400 frentes simulados distintos.

Una vez realizado el cálculo de la función de estructura de fase procedimos al ajuste de los datos. Realizamos el ajuste de los datos obtenidos para el estudio de las columnas, de las filas por separado y de la diagonal por separado. Posteriormente calculamos el valor medio de los resultados obtenidos del ajuste. Los resultados se presentan en el siguiente capítulo.

El segundo elemento de contraste consistirá en calcular numéricamente la matriz de covarianza de los 10 primeros coeficientes modales generados por nuestro simulador y compararla con la matriz de covarianza proporcionada en la referencia {1}. La matriz de covarianza se obtiene al calcular:

$$c_{ij} = \langle a_i \cdot a_j \rangle \tag{3.17}$$

Por último emplearemos como criterio el error cuadrático medio en la pupila del sistema en función del número de modos compensados exactamente {7}.

$$\begin{aligned}\sigma_{i_{teo}}^2 &= \sum_{j=i}^{\infty} \langle a_j^2 \rangle \\ \sigma_{i_{exp}}^2 &= \sum_{j=i}^{200} \langle \hat{a}_j^2 \rangle\end{aligned}\tag{3.18}$$

3.2.2 Sensor Shack-Hartmann

La evaluación del realismo de la simulación del sensor se realizó mediante la comprobación de: 1) el error que se comete en el cálculo del centroide de la distribución de irradiancia proporcionada por cada subpupila mediante el algoritmo integral de Hopkins en coordenadas cilíndricas {10}; y 2) comparar el valor teórico y el obtenido a partir de la simulación, de la varianza del promedio de la derivada (según una de las direcciones rectangulares definidas sobre la subpupila) de la fase, normalizada al radio de la subpupila {12}.

Para determinar el error cometido en el cálculo de la integral compararemos el valor del centroide obtenido tras realizar la integral con 20x20 subdominios de integración en el plano de la pupila, con el obtenido tras realizar la integración con 100x100 subdominios. Este proceso lo repetimos 6 veces, para 6 realizaciones distintas de la perturbación de fase, para poder realizar una estimación del error, que sea relativamente independiente de la perturbación de fase. Así calculamos el valor medio del porcentaje de error cometido en la determinación del centroide, obtenido para las 6 pantallas de fase escogidas al azar entre todas las que teníamos simuladas.

Presentaremos también datos sobre el tiempo de computación empleado en el cálculo de la integral en función del número de subdominios de integración que se emplee. A la hora de escoger el número de puntos con que trabajar en el plano de observación no

solo consideramos el error cometido en la integral sino que también valoramos el tiempo de computación empleado.

El segundo elemento de contraste es la varianza del promedio de la derivada (según una de las direcciones rectangulares definidas sobre la subpupila) de la fase, normalizada al radio de la subpupila. La expresión que permite calcular el valor de este varianza es, {12}:

$$\sigma_{at_{eo}}^2 = 1.685 \cdot \left(\frac{d_s}{r_0} \right)^{5/3} \quad (3.19)$$

donde d_s es el diámetro de la subpupila. En nuestro caso dicho valor lo calculamos de la siguiente forma. Simulamos 400 pantallas de fase distintas y empleamos el simulador del sensor Shack-Hartmann para obtener las medidas asociadas a dichas pantallas de fase. Las medidas se obtuvieron a partir de la expresión:

$$m_s = k \frac{x_c}{f} \quad (3.20)$$

donde k es el numero de onda, f es la focal de la subpupila, x_c es la posición del centroide de la distribución de irradiancia asociada a cada subpupila. Tras simular las medidas, realizamos el cálculo de la varianza de las medidas de cada subpupila, realizando el estudio estadístico sobre las 400 muestras. Tras este cálculo obtuvimos 36 valores de la varianza de las medidas, o lo que es lo mismo 18 pares de varianzas de medidas, dos varianzas, una para la dirección x , otra para la y , y 18, de las 18 subpupilas que tiene nuestro sensor. Por último como la perturbación de fase es un proceso homogéneo e isótropo, realizamos el promedio sobre las 36 varianzas obtenidas en el proceso, de forma que obtuvimos un único valor final. Éste lo comparamos con el valor teórico anteriormente mencionado. El estudio lo llevamos a cabo para la simulación realizada bajo las condiciones: $r_0=20$ cm y ausencia de ruido fotónico en las medidas.

Para poder comparar (3.20) con (3.19) necesitamos multiplicar (3.20) por r_s^2 , el radio de la subpupila, para así pasar de medidas de gradiente a medidas de gradiente normalizadas al radio de la subpupila, que es la magnitud de la cual su varianza viene dada por (3.19). Así el cálculo lo completamos con la expresión:

$$\sigma_{at_exp}^2 = \sigma_{m_s}^2 \cdot r_s^2 \quad (3.21)$$

donde $\sigma_{m_s}^2$ es la varianza de las medidas proporcionadas por el sensor de frente de onda.

3.3 Parámetros de calidad de la reconstrucción y la restauración

En las técnicas de restauración de imagen lo más importante es poder determinar con la mayor exactitud posible la función de degradación. En el caso de las observaciones astronómicas terrestres la función de degradación la constituye la OTF del sistema telescopio-atmósfera. Como ya apuntamos anteriormente ésta se obtiene de realizar la autocorrelación de la función pupila generalizada del sistema. Es en este punto donde la reconstrucción del frente de ondas perturbado se hace de vital importancia. Se puede decir que la calidad de la restauración va a venir fuertemente condicionada por la calidad de la reconstrucción del frente.

En este apartado vamos a presentar los parámetros empleados para analizar por un lado la calidad de la reconstrucción del frente y por otro la calidad de la restauración de la imagen.

Primero analizaremos la reconstrucción modal. Emplearemos como parámetros la varianza residual absoluta y relativa de los coeficientes modales:

$$\sigma_i^2 = \langle |a_i - \hat{a}_i|^2 \rangle \quad (3.22)$$

$$\sigma_{in}^2 = \frac{\langle (a_i - \hat{a}_i)^2 \rangle}{\langle (a_i)^2 \rangle} \quad (3.23)$$

donde σ_i^2 es la varianza residual del i-ésimo coeficiente y σ_{in}^2 es la varianza residual normalizada, a_i es el i-ésimo coeficiente y \hat{a}_i es el i-ésimo coeficiente estimado. Posteriormente analizaremos la razón de Strehl en función del número de modos corregidos. Ésta se define como el cociente entre el valor del pico del lóbulo central de la PSF de un sistema sin aberraciones y la correspondiente al sistema compensado. En el caso de que el error cuadrático residual de la fase sobre la pupila sea menor que $(\frac{2\pi}{10})^2$ la razón de Strehl se puede calcular mediante la expresión:

$$SR \approx \exp\{-\varepsilon^2\} \quad (3.24)$$

donde ε^2 es la varianza residual de la fase, que se define por:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{A_p} \int_{A_p} \langle (\psi(\bar{x}) - \hat{\psi}(\bar{x}))^2 \rangle d^2\bar{x} \quad (3.25)$$

donde A_p es el área de la pupila del sistema. La evaluación numérica de estas expresiones la realizaremos empleando la siguiente expresión:

$$SR(k) = \exp\left\{-\left[\left\langle \sum_{i=1}^{100} (a_i - \hat{a}_i)^2 \right\rangle + 0.2944 \cdot (101)^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{D}{r_0}\right)\right]\right\} \quad i > k \Rightarrow \hat{a}_i = 0 \quad (3.26)$$

donde el primer término de la exponencial representa la contribución de los términos compensados y el segundo sumando da cuenta de la contribución residual de todos los términos no compensados de orden superior a 100. Nótese que el sumatorio se extiende siempre a 100, de esta forma aumentamos el realismo del cálculo al introducir en éste la varianza correspondiente a los coeficientes simulados, en vez de la teórica.

Por último compararemos la OTF real con la OTF reconstruida. Analizaremos el error residual medio y su varianza en módulo y fase:

$$\sigma_{OTF}^2(\vec{f}) = \left\langle \left(1 - \frac{|O\hat{T}F|}{|OTF|} \right)^2 \right\rangle \quad (3.27)$$

$$\sigma_{\phi}^2(\vec{f}) = \left\langle (\phi_{OTF} - \phi_{O\hat{T}F})^2 \right\rangle \quad (3.28)$$

El análisis se realizó sobre el plano de Fourier bidimensional. Debido a la simetría de revolución de la OTF, ver apartado 1.3.1, decidimos realizar un promediado angular sobre las funciones evaluadas anteriormente, para presentar con mayor claridad los resultados obtenidos.

Por último analizaremos la calidad de la restauración realizada sobre los distintos objetos simulados bajo distintas condiciones de adquisición. Emplearemos para realizar este estudio el siguiente parámetro de ganancia G {8}:

$$G(dB) = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\sum_{n,m} (o-i)^2}{\sum_{n,m} (o-\hat{o})^2} \right\} \quad (3.29)$$

donde i es la imagen degradada, \hat{o} es la imagen restaurada y o es la imagen sin degradar, n, m recorren los píxeles de la imagen. Este parámetro nos da una idea de como de buena es la restauración en relación a la imagen degradada.

A lo largo de este capítulo hemos realizado una descripción del diseño del simulador y de los parámetros de análisis que emplearemos para analizar tanto la exactitud de la simulación como la calidad de la reconstrucción del frente y la restauración de imágenes. En el próximo capítulo presentaremos los resultados obtenidos en análisis realizado.

CAPITULO IV:

Evaluación del simulador y ejemplos de aplicación

En este capítulo vamos a presentar los resultados obtenidos al realizar los análisis propuestos en los apartados 3.2 y 3.3. Primero evaluaremos el grado de realismo que presenta el simulador cuando simula tanto la perturbación de fase introducida por la turbulencia atmosférica sobre el campo óptico al propagarse a través de ella, como el sensor Shack-Hartmann. Posteriormente y como parte del ejemplo de aplicación comprobaremos la calidad de la reconstrucción de la perturbación del frente. Dicha reconstrucción la realizamos mediante el empleo de un algoritmo de mínima varianza en cuyo proceso de construcción suponemos conocidos los valores exactos del parámetro de Fried y del flujo fotónico. Es por esto que la reconstrucción realizada establece un límite

superior en la calidad de la reconstrucción para el modelo concreto de sensor que nosotros utilizamos y para las características de la turbulencia simuladas. Por último presentaremos los resultados de la restauración realizada mediante la técnica de deconvolución a posteriori, empleando para reconstruir la perturbación de fase el algoritmo de mínima varianza.

4.1 Evaluación de la calidad de la simulación

Empezaremos comprobando el que el simulador reproduce la estadística de la distorsión de fase introducida por la atmósfera turbulenta sobre un campo óptico que se propagó a través de ella. Posteriormente analizaremos la varianza del promedio de la derivada (según una de las direcciones rectangulares definidas sobre la subpupila) de la fase, normalizada al radio de la subpupila.

4.1.1 Simulación de la perturbación de fase

El primer elemento de contraste va a ser la función de estructura de fase. Como ya indicamos en el capítulo anterior, en el apartado 3.2.1, vamos a calcular numéricamente la función de estructura de fase y posteriormente la ajustaremos a una expresión del tipo de (3.16). Los valores de los coeficientes que obtuvimos fueron, $a = 6.88 \pm 0.08$, $b = 1.66 \pm 0.01$. Comprobamos satisfactoriamente que recuperamos los valores teóricos ($a=6.88$, $b=1.66$) y además con un margen de error pequeño. Para el cálculo numérico de esta magnitud empleamos 400 muestras. Nos hubiera gustado emplear más muestras pero ello requería emplear tiempos de computación muy elevados.

El segundo elemento de contraste que empleamos fue la matriz de correlación de los coeficientes modales. Para su cálculo empleamos la expresión (3.17).

0.4531 / <u>0.4536</u>	0.0007 / <u>0</u>	-0.0001 / <u>0</u>	0	-0.0002 / <u>0</u>	-0.0001 / <u>0</u>	-0.0143	0	0	0
0.0007 / <u>0</u>	0.4541 / <u>0.4536</u>	0	0.0001 / <u>0</u>	0.0001 / <u>0</u>	-0.0143	0	0	0	0
-0.0001 / <u>0</u>	0	0.0235	0	0	0	0	0	0	-0.0039
0	0.0001 / <u>0</u>	0	0.0235	0	0	0	0	0	0
-0.0002 / <u>0</u>	0.0001 / <u>0</u>	0	0	0.0234 / <u>0.0235</u>	0	0	0	0	0
-0.0001 / <u>0</u>	-0.0143	0	0	0	0.0063	0	0	0	0
-0.0143	0	0	0	0	0	0.0063	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0063	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0063	0
0	0	0	-0.0039	0	0	0	0	0	0.0063

Tabla 4.1: Matriz de correlación de los coeficientes modales.

En la tabla 4.1 mostramos los resultados obtenidos. En la tabla se presentan los valores proporcionados por Noll en base a la estadística de Kolmogorov {1}, subrayados, y los obtenidos numéricamente por nosotros a partir de los coeficientes simulados. Aquellos elementos de la matriz de correlación cuyo valor experimental coincide con el teórico, se presenta únicamente el valor de este último.

Se puede observar que la concordancia entre los valores reales y obtenidos mediante la simulación es muy buena. Los elementos de la matriz de covarianza se obtuvieron mediante el empleo de la expresión (3.17), realizando el promedio sobre 10^5 muestras.

Por ahora hemos comprobado que la simulación sigue la estadística correcta. Para completar la comprobación presentamos los resultados correspondientes a la comparación realizada a partir del tercer criterio presentado en el capítulo anterior, mediante el empleo de la expresión (3.18). Esta última comprobación consiste en analizar el error cuadrático medio sobre la pupila del sistema tras corregir de forma exacta los N primeros modos del desarrollo en serie de la perturbación de fase, tabla 4.2. Se observa en dicha tabla, una ligera discrepancia entre los valores teóricos y los obtenidos de la simulación.

N	error en rad ²	
1	1.0299	1.0376
2	0.5820	0.5837
3	0.1340	0.1329
4	0.1110	0.1096
5	0.0880	0.0860
6	0.0648	0.0626
7	0.0587	0.0563
8	0.0525	0.0501
9	0.0463	0.0438
10	0.0401	0.0376
11	0.0377	0.0351
12	0.0352	0.0326
13	0.0328	0.0301
14	0.0304	0.0276
15	0.0279	0.0251
16	0.0267	0.0239
17	0.0255	0.0227
18	0.0243	0.0215
19	0.0232	0.0203
20	0.0220	0.0191
21	0.0208	0.0179

Tabla 4.2: Comparación entre el valor teórico del error cuadrático medio residual tras la compensación de los N primeros modos y el valor numérico calculado. La primera columna indica hasta que modo se corrigió la fase, la segunda corresponde a los datos teóricos y la tercera a los calculados.

Creemos que dicha discrepancia se debe a haber simulado la atmósfera únicamente con 200 modos, cuando deberían haber sido infinitos. De hecho comprobamos que si al error cuadrático medio sobre la pupila, obtenido a partir de la

simulación le sumamos el residual que se comete al no compensar los modos superiores al 200, la diferencia entre los valores teóricos y los obtenidos de la simulación no supera el 2%. La obtención numérica de estos valores se completó realizando el promedio sobre 10^5 muestras. Los resultados teóricos correspondientes se pueden encontrar en la referencia {2}.

Hemos visto que la generación de los coeficientes modales es buena. Las comparaciones realizadas mediante los tres parámetros han proporcionado resultados muy parejos. A nivel práctico se ha comprobado que el coste computacional asociado al cálculo de la matriz de covarianza y el error cuadrático medio tras la compensación de los modos es muy inferior al necesario para poder calcular la función de estructura. Este hecho conlleva que sin la necesidad de emplear más tiempo en el cálculo de estas magnitudes se pueda aumentar considerablemente el número de muestras a la hora de realizar el promedio, permitiendo esto realizar promedios mucho más exactos.

4.1.2 Simulación del sensor de frente de onda tipo Shack-Hartmann

Una vez comprobada la correcta simulación de la perturbación de fase producida por las turbulencias atmosféricas caracterizamos el simulador del sensor de frente de onda tipo Shack-Hartmann.

Como indicamos en el capítulo anterior empezaremos evaluando el error que cometemos en el cálculo del centroide de la distribución de irradiancia que proporciona cada una de las subpupilas del sensor de onda tipo Shack-Hartmann en su plano focal mediante el algoritmo integral de Hopkins. Se comprobó que con 20×20 subintervalos el error cometido era inferior al 2% respecto al valor obtenido de realizar la integral con una malla de 100×100 . El error cometido en la realización de la integral se podía haber reducido realizando ésta sobre una malla que comprendiera más subintervalos de integración. El motivo de no aumentar el número de subintervalos se encuentra en que

este incremento conllevaba un aumento excesivo en el tiempo de computación. Así por ejemplo realizar la integral sobre un conjunto de 20x20 subdominios requiere 22 seg, sobre un conjunto de 30x30 ya sube a 51 seg y con 100x100 llegamos a los 450 seg. Tener en cuenta que estos tiempos son los empleados en la realización de la integral de difracción asociada a una subpupila. En nuestro caso, en que el sensor tiene 18 subpupilas, hay que multiplicar este tiempo por 18 para saber cuanto tardamos en simular las medidas proporcionadas por nuestro sensor. Si además queremos realizar un estudio estadístico, sobre distintas realizaciones de la perturbación de fase que muestrea nuestro sensor, tenemos que multiplicar el tiempo que tarda en analizar cada frente por el número de frentes.

Para hacernos una idea del tiempo total, en nuestro caso, que trabajamos con 18 subpupilas y 400 realizaciones de la perturbación de fase, simulada con 200 polinomios de Zernike y un procesador Pentium 200 MMX con 98 Mb de memoria Ram, el tiempo total de la simulación es de 2 días, mientras que si usásemos la malla de 30x30 el tiempo total sería aproximadamente de 4 días. Vemos así que el tiempo de computación se dispara y este hecho junto a que el porcentaje de error del centroide cometido al emplear una malla de 20x20 subdominios es pequeño creemos que no vale la pena aumentar el número de subintervalos de integración.

Una vez comprobado el algoritmo de cálculo de la integral vamos a verificar la correcta simulación de las medidas que proporciona un sensor de onda tipo Shack-Hartmann. Para ello escogimos el camino presentado en el apartado 3.2.2. El estudio lo llevamos a cabo para la simulación realizada bajo las condiciones: $r_0=20$ cm y ausencia de ruido fotónico en las medidas. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: $\sigma_{at_{teo}}^2 = 5.35$ rad², obtenido a partir de la expresión (3.21), y $\sigma_{at_{exp}}^2 = 5.11$ rad² obtenido de los datos de la simulación. La diferencia entre ambos valores es de un 4.4%, lo que nos confirma la buena simulación de las medidas. Creemos que el pequeño error existente se puede deber a dos factores: 1) el error cometido en el cálculo de la distribución de

irradiancia proporcionada por las subpupilas; 2) debido al escaso número de pantallas de fase que empleamos en el promedio. En relación con este estudio, cabe también mencionar que las varianzas de la pendiente, obtenidas para las distintas subpupilas y para ambas direcciones cartesianas son muy parecidas, teniendo dichos valores una desviación standard relativa de 5%, hecho que confirma la buena simulación de las medidas.

4.2 Calidad de la reconstrucción

Una vez evaluada la calidad de la restauración vamos a presentar los resultados obtenidos de la aplicación de nuestro simulador a un ejemplo concreto. Primero mostraremos los resultados de la reconstrucción del frente. Posteriormente presentaremos la reconstrucción de la OTF.

4.2.1 Reconstrucción del frente

En las técnicas de Óptica Adaptativa y Deconvolución a posteriori una buena estimación de la perturbación del frente es crucial. De entre los distintos criterios de estimación nosotros hemos elegido el de mínima varianza {3}.

En un proceso de estimación real la reconstrucción del frente se realiza a partir de las medidas proporcionadas por el sensor de frente de onda {4}. El proceso que seguiremos para simular la reconstrucción del frente será el siguiente. Comenzaremos generando la pantalla de fase que simula la perturbación introducida por la turbulencia atmosférica sobre el campo óptico. Posteriormente simularemos la distribución de irradiancia producida por cada una de las subpupilas del sensor en su plano focal, al incidir sobre ellas la sección correspondiente del frente perturbado. Luego usaremos la distribución de irradiancia asociada a cada subpupila para simular la incidencia de un

flujo fotónico determinado y así obtener la medida correspondiente a cada subpupila cuando inciden sobre ella un cierto número de fotones. Después Emplearemos estas nuevas distribuciones de irradiancia para computar el desplazamiento relativo de cada centroide respecto a su posición nominal. Una vez simuladas las medidas, las colocamos adecuadamente, en relación al orden establecido a la hora de generar la matriz de reconstrucción de los coeficientes modales. La reconstrucción de los coeficientes modales se completa multiplicando el vector medidas por la matriz de reconstrucción de mínima varianza. Este proceso lo repetimos para 400 pantallas de fase distintas, lo que nos va a permitir realizar un estudio estadístico de nuestro proceso de reconstrucción.

Estudiamos la dependencia de la calidad de la reconstrucción respecto al parámetro de Fried y al ruido fotónico, empleando las expresiones (3.22) y (3.23). El análisis lo realizamos para tres valores distintos de $r_0=40, 20, 10 \text{ cm}$ ($0.2D, 0.1D$ y $0.05D$ respectivamente) y para cada uno de ellos estudiamos el error de la reconstrucción considerando dos casos: ausencia de ruido fotónico (como es el caso en el que el flujo es muy elevado, por ejemplo 10000); y con ruido fotónico relevante (correspondiente a 75 fotones por subpupila por muestra). La presentación de este estudio llevaría a mostrar 12 gráficas distintas. Debido a que la evolución de la reconstrucción con el flujo fotónico sobre cada subpupila es muy parecida, mostraremos solo 8 de las 12 gráficas. Presentamos en la figura 4.1 y 4.2 los resultados del error cuadrático medio y error cuadrático medio normalizado cometido en la estimación de cada modo, obtenidos en las condiciones de $r_0=40 \text{ cm}$ y $r_0= 20 \text{ cm}$ respectivamente, para los dos casos de flujo fotónico mencionados.

Se puede observar a continuación, en la figura 4.1, que para un valor fijo de r_0 el error cuadrático medio residual del frente aumenta considerablemente al disminuir el flujo fotónico sobre las subpupilas. Se puede observar el mismo comportamiento en el error cuadrático medio residual normalizado. Resaltamos en este caso que, como se puede observar en la figura 4.1, nunca cometemos un error mayor del 100%. Este hecho se debe a que hemos usado un criterio de mínima varianza con r_0 y ruido bien estimados. El no

cometer un error mayor del 100% en la estimación de un modo tiene como consecuencia adicional que cuantos más modos estimemos mejor va a ser la recuperación del frente.

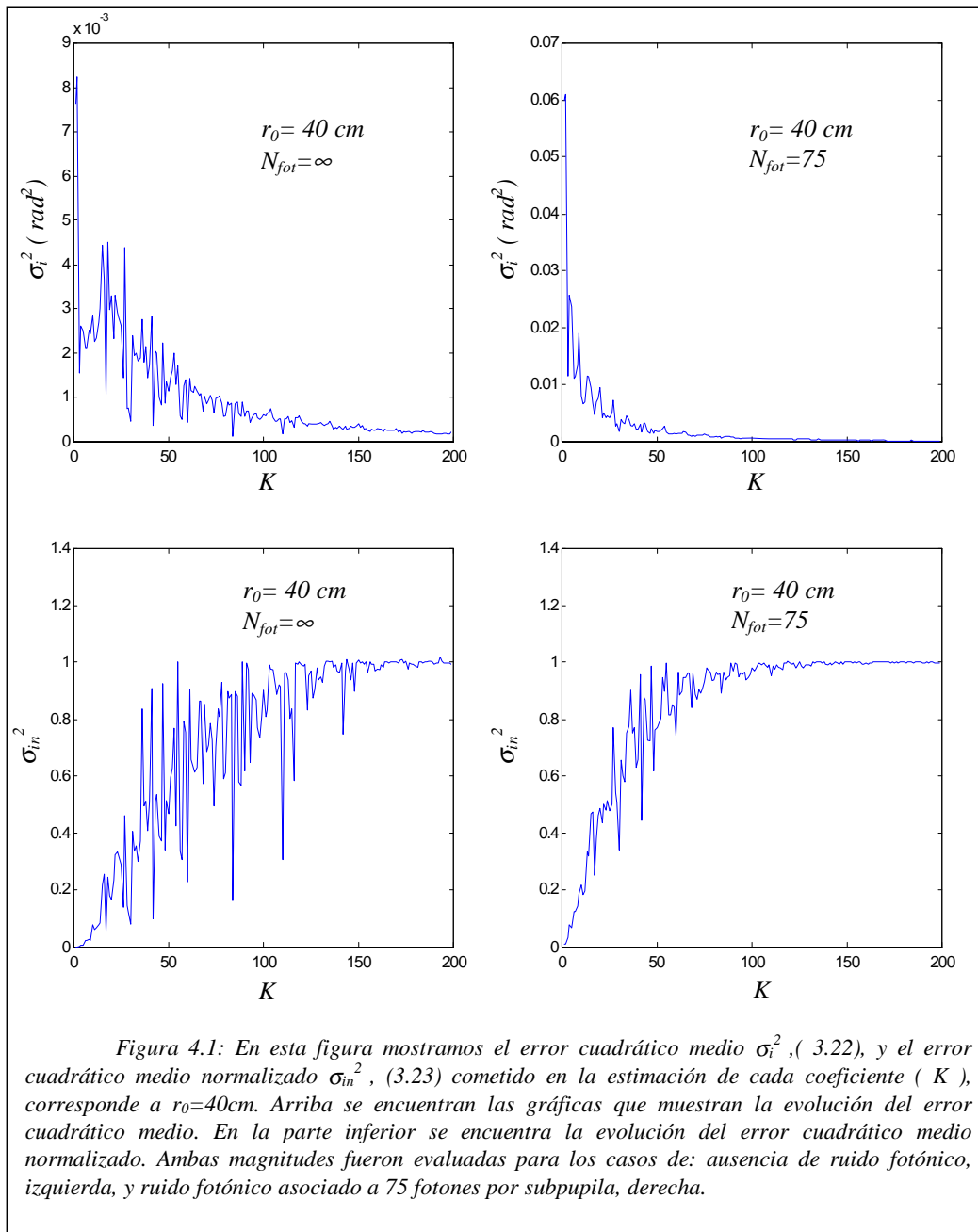
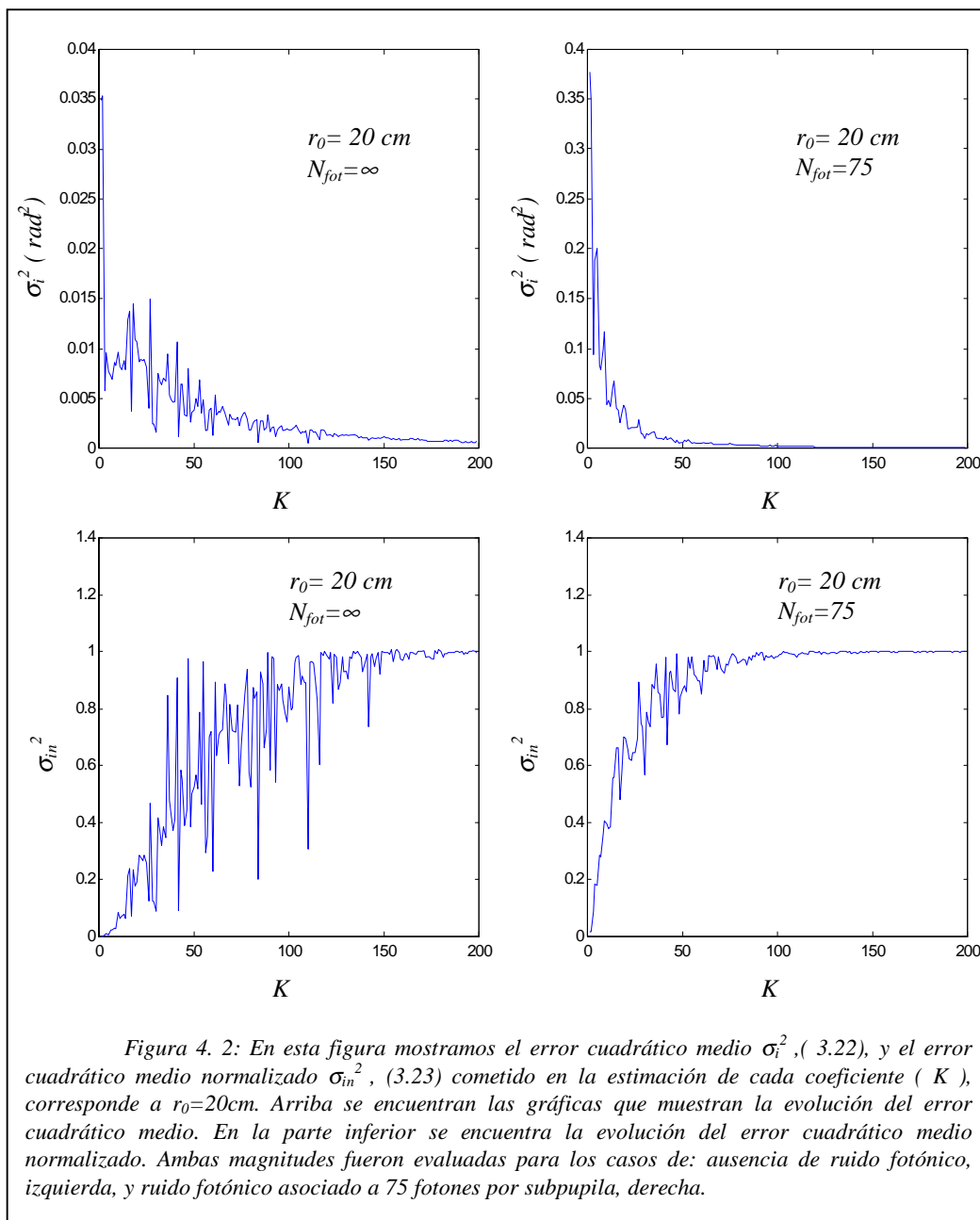


Figura 4.1: En esta figura mostramos el error cuadrático medio σ_i^2 , (3.22), y el error cuadrático medio normalizado σ_{in}^2 , (3.23) cometido en la estimación de cada coeficiente (K), corresponde a $r_0=40$ cm. Arriba se encuentran las gráficas que muestran la evolución del error cuadrático medio. En la parte inferior se encuentra la evolución del error cuadrático medio normalizado. Ambas magnitudes fueron evaluadas para los casos de: ausencia de ruido fotónico, izquierda, y ruido fotónico asociado a 75 fotones por subpupila, derecha.

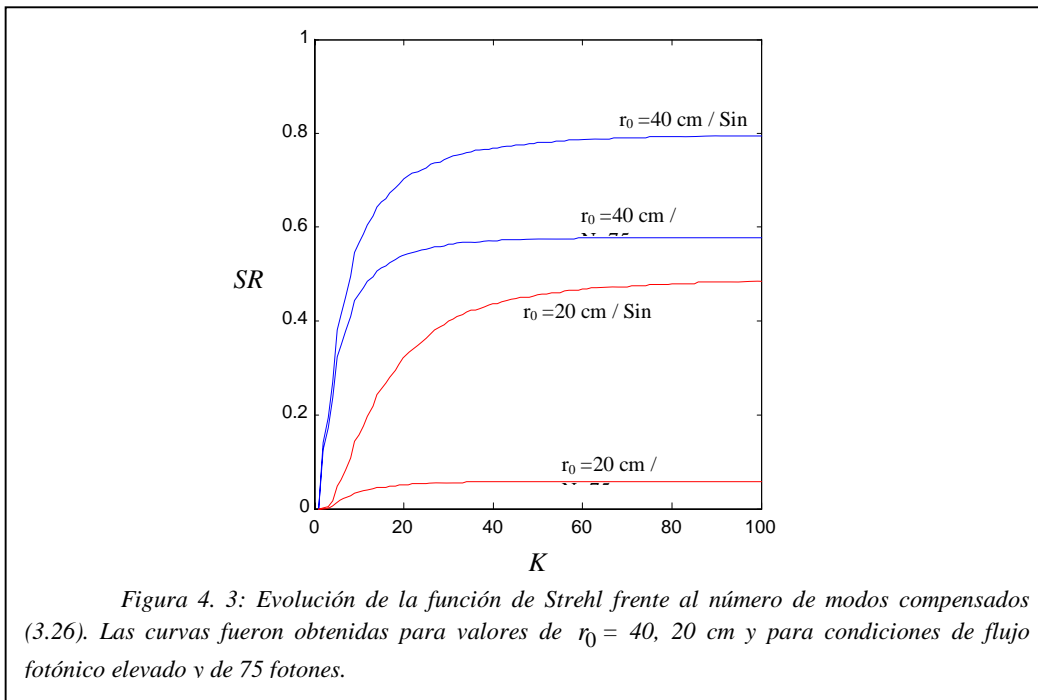


Asimismo observamos en la figura 4.1-4.2, que en el caso de flujo fotónico infinito el error cuadrático medio residual aumenta al disminuir el parámetro de Fried mientras que el error cuadrático medio residual normalizado es aproximadamente el mismo. La razón de este comportamiento dispar se encuentra en que al disminuir el parámetro de Fried aumentamos la intensidad de la turbulencia. Este aumento repercute en el valor de los coeficientes modales, pudiendo entonces adquirir valores mayores. El aumento en su magnitud lleva a que el error cuadrático medio residual cometido sea mayor, mientras que en el caso del error cuadrático medio residual normalizado este aumento casi no se aprecia, pues el factor de normalización también aumenta en la misma proporción que el numerador, cancelando así el efecto del aumento de la intensidad de la turbulencia. El pequeño aumento que pueda haber del error residual normalizado al disminuir el parámetro de Fried se debe a ruido existente en la determinación del centroide debido a pixelización. Por otra parte en presencia de un flujo fotónico de 75 fotones por subpupila por medida, el error cuadrático medio normalizado varía sustancialmente con la intensidad de la turbulencia debido a que la influencia del ruido fotónico en el error de las medidas aumenta con r_0 .

Un parámetro de extenso uso en el campo de la astronomía es la razón de Strehl {5}. Está relacionado con el error cuadrático medio residual de la fase sobre la pupila del sistema, y permite caracterizar la calidad de la reconstrucción rápida y sencillamente, de ahí el gran uso que tiene.

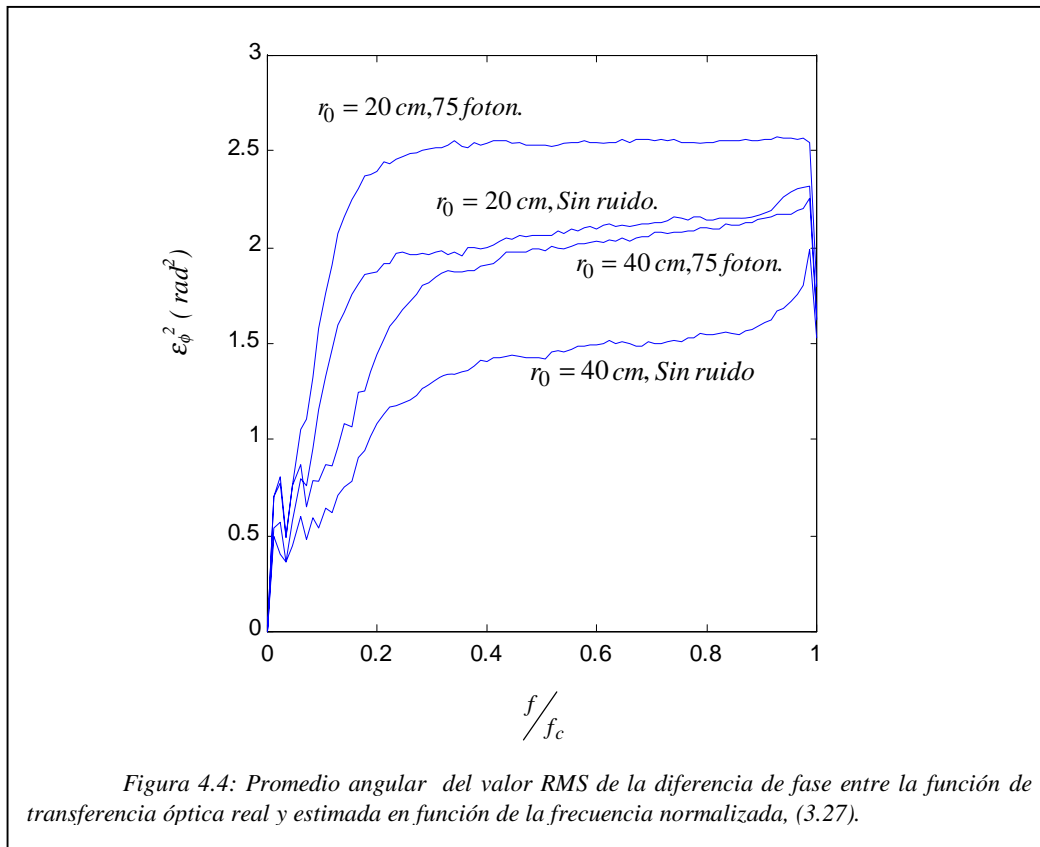
En la figura 4.3 mostramos la evolución de la razón de Strehl con el número de modos compensados (3.26), para los valores de $r_0 = 40, 20 \text{ cm}$, en los casos de: ausencia de ruido fotónico; y flujo fotónico de 75 fotones por subpupila y medida.

Observamos la fuerte dependencia de la razón de Strehl con el parámetro de Fried y el flujo fotónico. Como era de esperar la corrección que se puede alcanzar disminuye al endurecer las condiciones de trabajo, esto quiere decir al disminuir r_0 y el flujo fotónico. Podemos observar asimismo que el efecto negativo de la disminución del flujo fotónico es mayor cuando el parámetro de Fried toma valores más bajos.



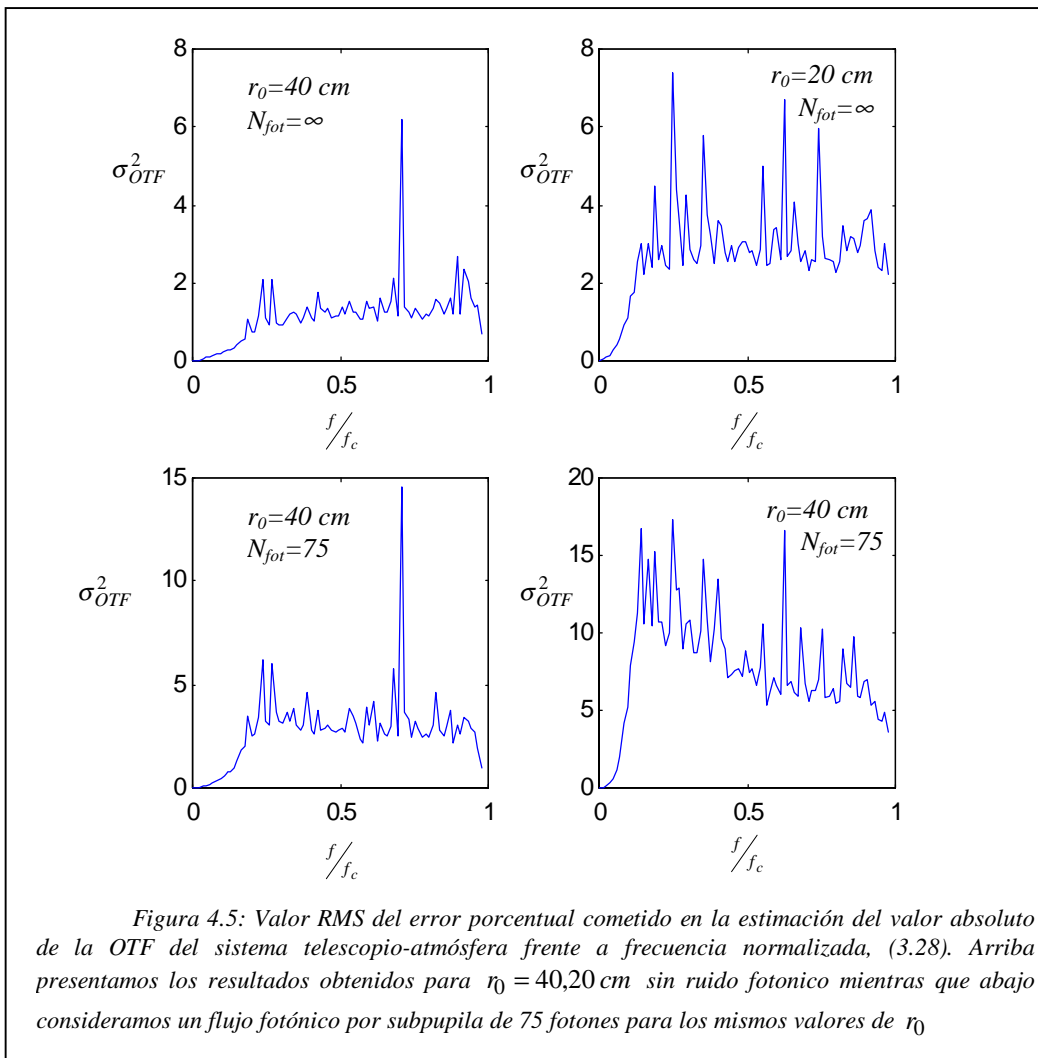
4.2.2 Reconstrucción de la OTF

Hasta ahora hemos realizado la valoración de la simulación de la perturbación de fase y de la reconstrucción del frente de ondas correspondiente al campo existente en la pupila de entrada del telescopio. Pero en la técnica de Deconvolución Postdetección la magnitud más relevante es la función de transferencia óptica que se construye a partir de la información del frente de ondas proporcionada por el sensor. Es por esto que a continuación realizamos el estudio de la calidad de la reconstrucción de la OTF (3.27), (3.28). Dicho análisis lo realizamos para distintos valores de los parámetros de ruido fotónico y r_0 , aunque a continuación mostremos únicamente los resultados obtenidos para los casos de flujo fotónico elevado y de 75 fotones por subpupila para los valores de $r_0 = 40, 20$ cm.



Observamos en la figura 4.5 que al disminuir el flujo fotónico y el parámetro de Fried, el valor RMS de la diferencia entre la fase de la OTF real y estimada aumenta. Un comportamiento similar se puede observar en la figura 4.5, en la cual presentamos el valor RMS del error porcentual cometido en la estimación del valor absoluto de la OTF.

Los resultados presentados en las figuras 4.4 y 4.5 nos indican que la estimación de la OTF con un sensor de dimensiones reducidas (18 subpupilas) presenta algunas carencias, sobre todo en lo que afecta a la estimación de la fase. La calidad de la estimación, afectada aquí por el submuestreo del frente de ondas, puede ser mejorada utilizando sensores con un mayor número de subpupilas.



4.3. Calidad de la restauración

Mostrada la validez de la simulación y comprobada la calidad de la recuperación de los coeficientes modales mediante un reconstructor de mínima varianza, nos falta mostrar los resultados de la simulación del sistema de deconvolución postdetección.

La simulación la realizamos para tres valores distintos del parámetro de Fried, $r_0 = 40, 20, 10 \text{ cm}$ y para dos niveles de ruido fotónico: en ausencia de ruido y ruido fotónico asociado a un flujo fotónico de 75 fotones por subpupila por muestra. La restauración la llevamos a cabo mediante los tres filtros presentados en el capítulo 2, en la tabla 2.1. La realización de la restauración mediante los tres filtros se debe a nuestro interés en mostrar la importancia que tiene la elección del criterio de minimización en los resultados de la restauración.

Como primer resultado presentamos en la figura 4.6 dos gráficas en las que representamos la ganancia G de la restauración en función del parámetro de Fried y del nivel de ruido fotónico, para los tres filtros empleados. La gráfica superior se obtuvo del estudio de la imagen del conjunto de estrellas simulada, figura 3.2.a, y la inferior del estudio de una estrella binaria simulada, figura 3.2.b. Se puede observar que únicamente aparecen dos curvas para cada nivel de flujo fotónico. Esto se debe a que las ganancias de la restauración obtenidas mediante los filtros regresivo y promedio de Wiener, son muy parecidos. También se observa que, como era de esperar, al aumentar el valor del parámetro de Fried aumenta la calidad de la restauración, este hecho se debe a que la estimación de la OTF del sistema telescopio-atmósfera mediante el sensor Shack-Hartmann es mejor. Asimismo se comprueba que la existencia de ruido fotónico tanto en las medidas proporcionadas por el sensor como en la imagen empobrece sustancialmente la restauración. Creemos que en el ejemplo estudiado el factor dominante en este empobrecimiento es el ruido en las medidas proporcionadas por el sensor, ya que éste disminuirá la calidad de la estimación de los coeficientes modales, lo que afecta directamente a una mala estimación de la función degradadora.

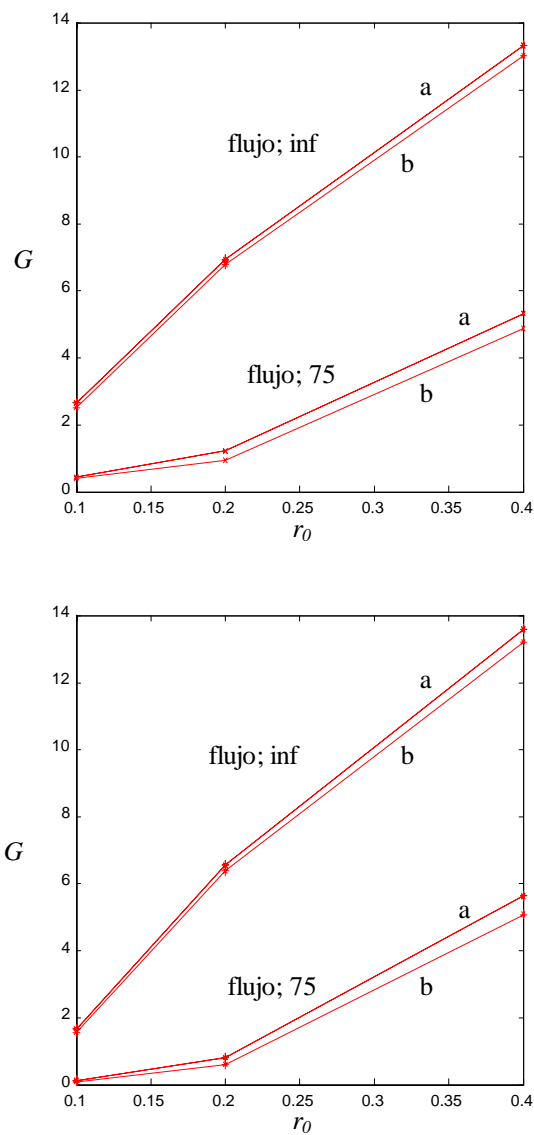


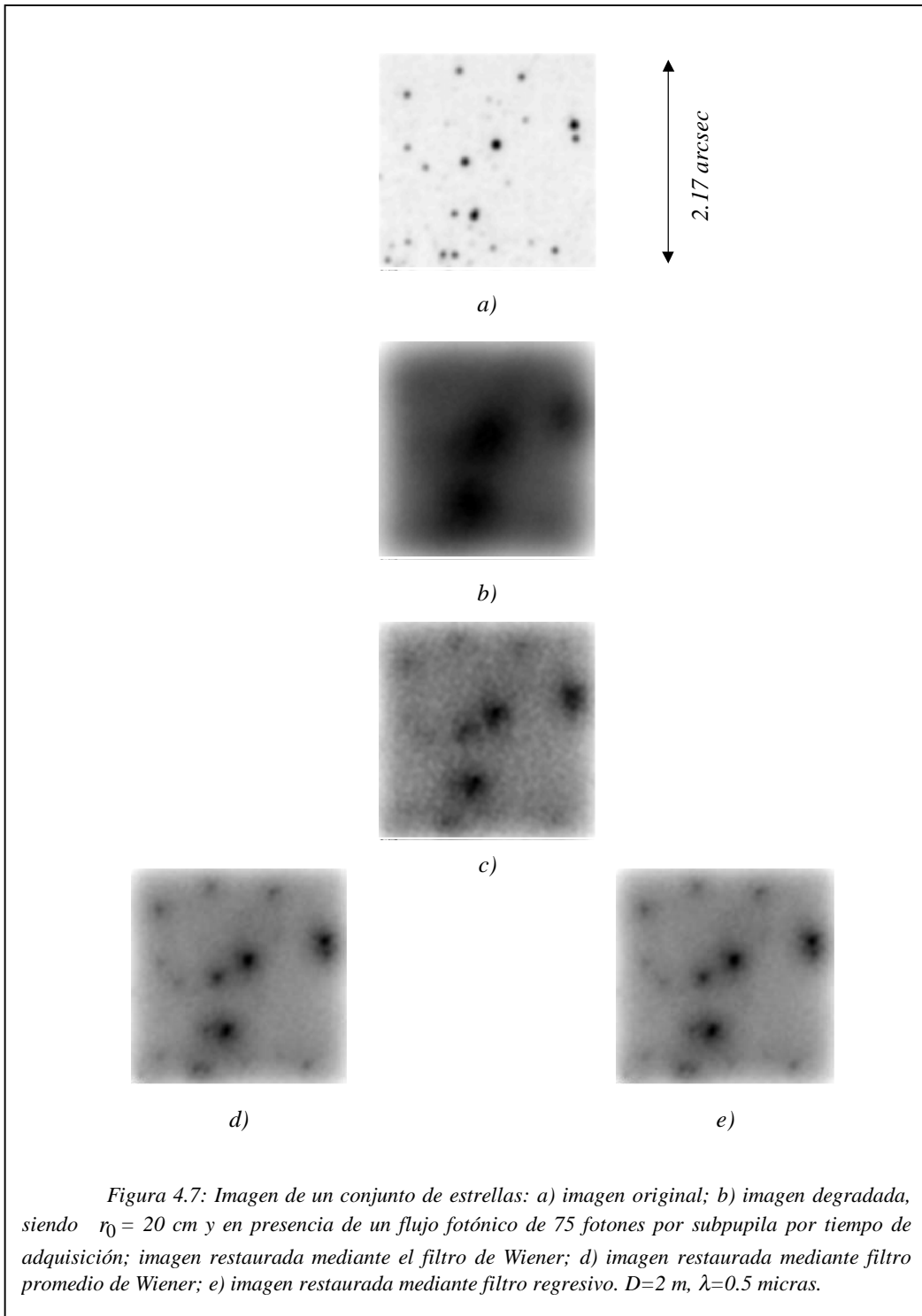
Figura 4.6: Evolución de la restauración de la imagen del conjunto de estrellas, figura 3.2.a y de la estrella binaria simulada, figura 3.2.b, (gráfica inferior), en función del parámetro de Fried en centímetros, para los casos de: ausencia de ruido fotónico; y de ruido fotónico asociado a un flujo de 75 fotones por subpupila. La leyenda a) hace referencia al filtro regresivo y al filtro promedio de Wiener, mientras que la b) hace referencia al filtro de Wiener. La expresión que empleamos para calcular G es la (3.29).

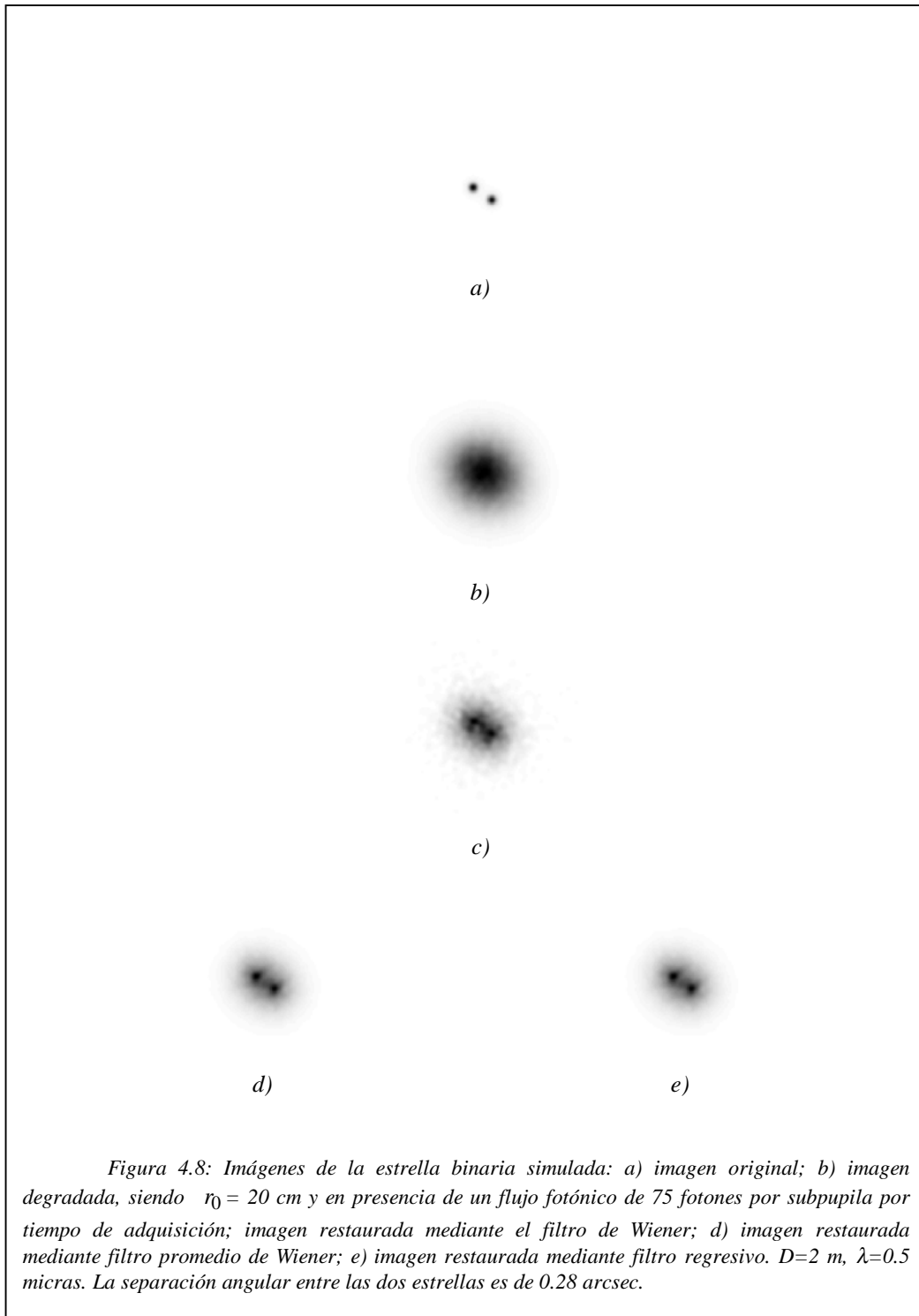
Comparando las gráficas superior e inferior de la figura 4.6 se comprueba que la ganancia de la restauración son prácticamente independientes del objeto. Este hecho nos sugiere que la técnica presentada se puede aplicar con éxito sobre cualquier tipo de objeto, independientemente de su forma.

Como dijimos anteriormente, una parte de nuestro trabajo se ocupó de reflejar la importancia del criterio de minimización en el proceso de restauración. A continuación en la figura 4.7 presentamos un caso particular en el que se aprecia visualmente el efecto que tiene sobre la restauración la elección del criterio de minimización.

El caso presentado corresponde a la simulación de la imagen del conjunto de estrellas, bajo un flujo fotónico de 75 fotones por subpupila y un parámetro de Fried de 20 cm. La figura *a*) corresponde a la imagen original simulada, no degradada, la figura *b*) es la imagen degradada. La figura *c*) es la imagen restaurada obtenida de emplear el filtro de Wiener sobre cada imagen de corta exposición y posteriormente haber realizado el promedio sobre las distintas imágenes restauradas. Obtuvimos *d*) y *e*) mediante el empleo del filtro promedio de Wiener y del filtro regresivo respectivamente.

Se puede observar que *c*) está más borrosa que *d*) y *e*), pudiéndose en estas dos últimas resolver los pares de estrellas existentes en la imagen simulada, cosa que no se puede conseguir en *c*). Se puede observar también que los resultados obtenidos del empleo de los filtros promedio de Wiener y regresivo son sustancialmente iguales. Creemos que esto se debe principalmente a que la forma funcional de ambos filtros se diferencia únicamente en un término en el denominador, ver tabla 2.1, al cual le dimos el valor constante de 10^{-4} . La elección de este valor se debe a que era el que mejores restauraciones proporcionaba. Un comportamiento similar se puede observar en el caso en el que empleamos la estrella binaria simulada, figura 4.8.



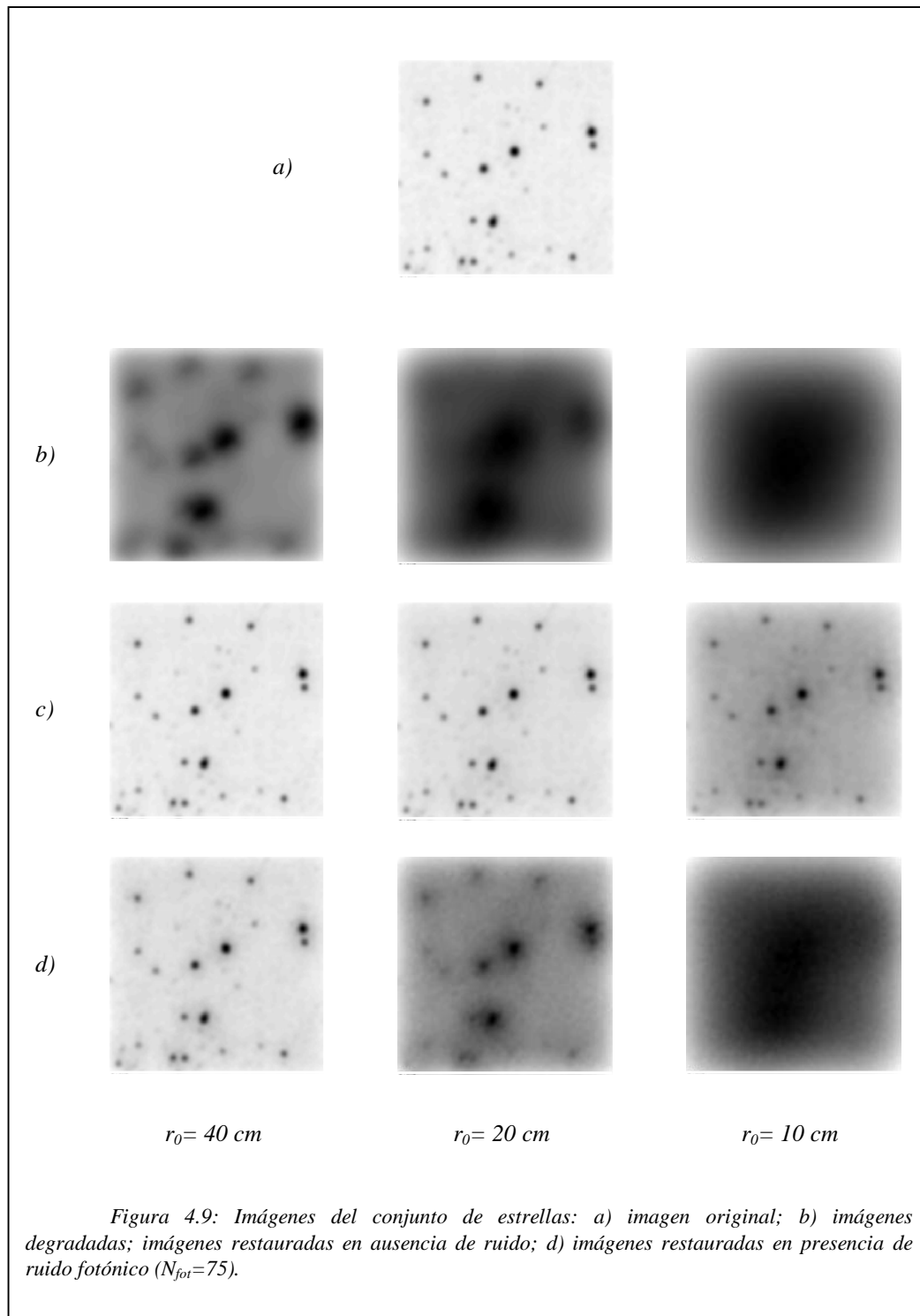


Una vez comprobada la importancia que tiene la elección del criterio de minimización sobre la calidad de la restauración, pasaremos a mostrar los resultados obtenidos de la restauración de las imágenes degradadas, bajo las condiciones de $r_0 = 40, 20, 10 \text{ cm}$ y en las condiciones de ruido fotónico de: ausencia de ruido; y ruido asociado a 75 fotones por subpupila por medida. Aún habiendo realizado la restauración mediante los tres filtros presentados anteriormente, únicamente mostraremos los resultados obtenidos de la aplicación del filtro promedio de Wiener, por ser el que mejores resultados proporciona.

Primero presentaremos los resultados de la restauración de la imagen simulada de un conjunto de estrellas, figura 4.9. Más adelante mostraremos los resultados correspondientes a la simulación de una estrella binaria, figura 4.10. La distribución de las imágenes en las figuras asociadas a estos resultados es la siguiente. Arriba presentaremos la imagen del objeto sin degradar. Debajo mostraremos las imágenes degradadas bajo los distintos valores de r_0 anteriormente citados. En la siguiente fila se encontrará la imagen restaurada mediante el filtro promedio de Wiener, para el caso en el que se consideró la incidencia de un flujo fotónico elevado. En la fila siguiente se presenta igualmente la imagen restaurada mediante el filtro promedio de Wiener pero en este caso considerando la incidencia de 75 fotones por cada subpupila.

El primer efecto resaltable de la figura 4.9 es el aumento del grado de degradación a medida que disminuye el parámetro de Fried. Al ser imágenes de larga exposición la degradación se traduce en un filtrado de las altas frecuencias del espectro de potencias de las imágenes, lo que provoca el emborronamiento de las mismas.

El segundo efecto resaltable es la evolución de la restauración. En el caso de que el nivel de flujo fotónico es elevado tanto en el canal del sensor como en el de imagen, se puede observar que la restauración es muy buena, aunque como era de esperar se empobrezca a medida que disminuye r_0 . Por otra parte en presencia de un flujo fotónico pequeño la restauración empeora mucho más.



En nuestra opinión la causa del gran empobrecimiento de la restauración, cuando el flujo fotónico incidente es de 75 fotones por subpupila, se encuentra en una mala estimación de la perturbación de fase introducida por la turbulencia atmosférica en el campo que incide sobre el telescopio, ver apartado 2.3.2.1, que provoca un último lugar una mala estimación de la OTF del sistema, o en términos del procesado de imagen, una mala estimación de la función degradadora.

Nos parece interesante explicar en más detalle por qué empeora la restauración al disminuir el flujo fotónico y r_0 . En el caso de nuestra simulación la calidad de la restauración, en presencia de ruido fotónico, viene limitada por el error que se comete en la determinación del centroide asociado a cada subpupila del sensor de frente de onda.

Dos factores que condicionan directamente la determinación del centroide son el flujo fotónico y el parámetro de Fried. En presencia de un flujo fotónico finito, el número de fotones que incide sobre una región del espacio, fluctúa aleatoriamente, siendo dicha fluctuación, mayor en términos relativos a medida que el flujo fotónico disminuye.

Esta fluctuación en el número de fotones que incide sobre una región del espacio puede llevar a que el centroide se desplace respecto a la posición que debería tomar en ausencia de ruido, lo que llevaría a una mala estimación del gradiente local de la fase y por tanto a una mala estimación del frente. La fluctuación aleatoria acentuada por el bajo flujo fotónico se ve afectada por el estado de la turbulencia en el momento en el que se produce la medida. Cuanto mayor sea la intensidad de la turbulencia, r_0 menor, el foco producido por las subpupilas en su plano imagen será más ancho. Este ancheamiento se traduce en una disminución de la intensidad del mismo, favoreciendo de este modo un aumento en la fluctuación relativa del número de fotones, y aumentando de esta forma el error en la determinación del centroide.

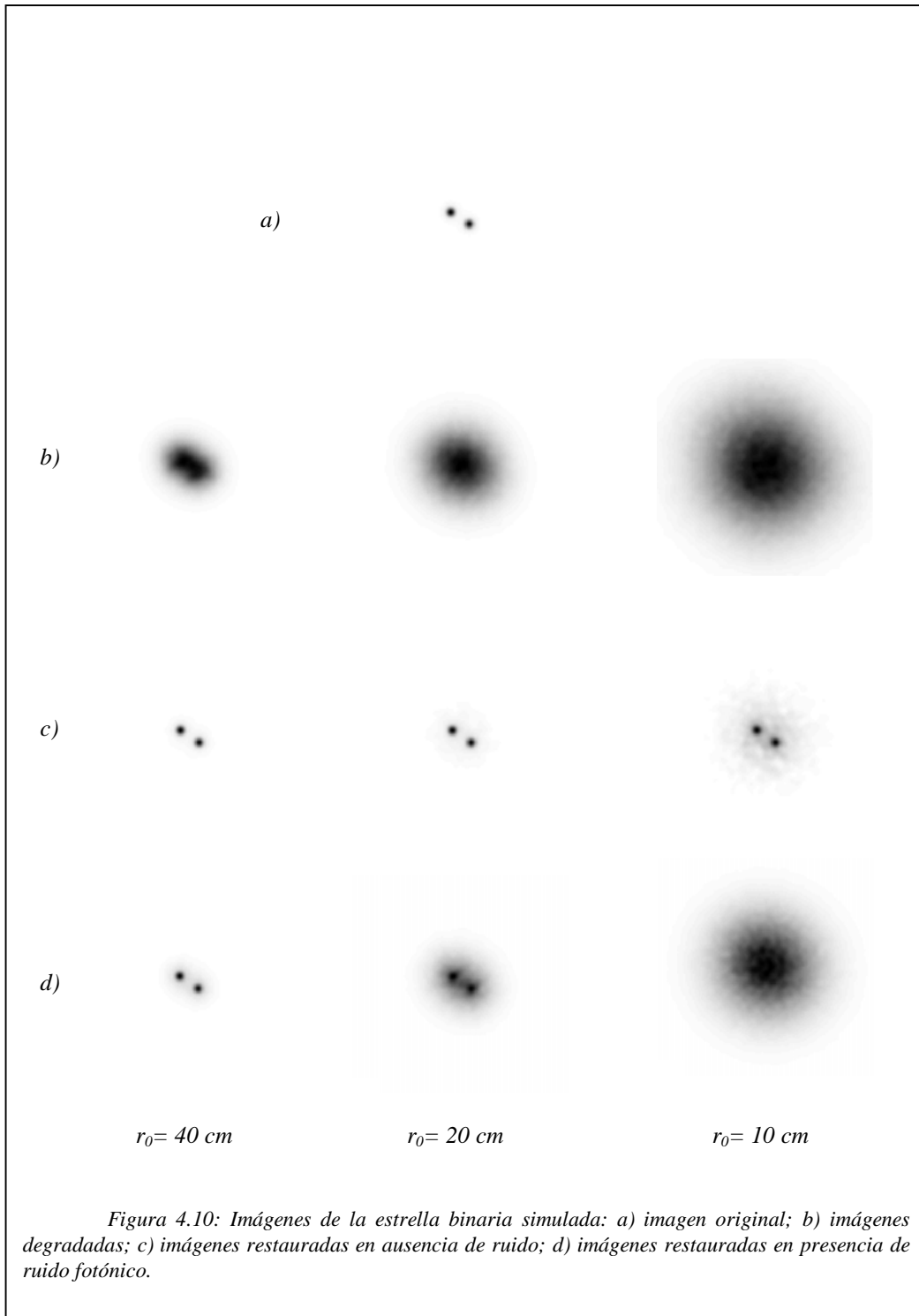


Figura 4.10: Imágenes de la estrella binaria simulada: a) imagen original; b) imágenes degradadas; c) imágenes restauradas en ausencia de ruido; d) imágenes restauradas en presencia de ruido fotónico.

En la figura 4.10 presentamos las imágenes asociadas a la degradación y restauración de la imagen de una estrella binaria simulada, bajo las condiciones de: $r_0 = 40, 20, 10$ cm y los casos de: *ausencia de ruido fotónico*, y *ruido fotónico asociado a un flujo fotónico de 1869 fotones en el canal de la imagen y 75 fotones por subpupila por medida*. Se puede observar que aun cambiando de objeto llegamos a los mismos resultados obtenidos durante el estudio de la imagen del conjunto de estrellas.

A lo largo de este capítulo hemos presentado los resultados del análisis del simulador. Empezamos realizando el estudio de la exactitud de la simulación de la perturbación de fase introducida por la turbulencia atmosférica sobre el campo óptico que la atraviesa. Posteriormente comprobamos la simulación del sensor de frente de onda tipo Shack-Hartmann. Luego proseguimos con el estudio de la reconstrucción de la perturbación del frente a partir de las medidas proporcionadas por el sensor. Y por último realizamos la simulación del sistema de Deconvolución Postdetección. Para completar el estudio nos falta presentar las conclusiones, lo cual haremos en el capítulo siguiente.

CAPITULO V:

Conclusiones

El objetivo del trabajo realizado fue construir un simulador para la evaluación de sistemas de restauración de imágenes degradadas por turbulencias atmosféricas mediante la técnica de Deconvolución Postdetección.

En los dos primeros capítulos presentamos la teoría necesaria para comprender los fenómenos involucrados en el sistema que estudiamos. En el primero de ellos describimos la atmósfera desde el punto de vista de la óptica estadística, en el segundo presentamos distintas técnicas que se emplean en la actualidad para compensar los efectos degradadores de la turbulencia atmosférica en la formación de imágenes astronómicas.

Del análisis del simulador podemos decir que los distintos elementos que hemos simulado se comportan con razonable realismo. Hemos visto que la generación de las pantallas de fase es correcta. El mismo comportamiento se obtuvo al estudiar la simulación del funcionamiento del sensor de frente de onda tipo Shack-Hartmann.

Con el empleo del simulador se comprobó la eficacia del algoritmo de mínima varianza para estimar los coeficientes modales del desarrollo en serie de polinomios de Zernike de la perturbación de fase producida por la turbulencia atmosférica sobre el campo óptico.

También se comprobó al emplear el simulador para simular el proceso de deconvolución postdetección que esta técnica se puede usar tanto para objetos extensos como de pequeño ancho angular, siendo su comportamiento muy similar en ambos casos. Del mismo modo comprobamos la importancia de la elección del filtro restaurador, observando una mejora en los resultados de la restauración cuando se empleaban los filtros promedio de Wiener y filtro regresivo.

Durante el tiempo empleado en el diseño del simulador se nos han ido planteando distintas líneas por las que continuar el trabajo presentado. Estas líneas son las siguientes:

- Realizar la simulación permitiendo que la amplitud del campo sea variable (fenómenos de centelleo).
- Realizar la simulación cambiando las características del sensor. En particular aumentando el número de subpupilas y cambiando su disposición.
- Estudiar nuevos métodos de simulación de la perturbación introducida por la atmósfera sobre el campo óptico que se propaga a través de ella.
- Establecer una comparación entre la simulación de las medidas mediante la resolución de la integral de difracción mediante el algoritmo integral de Hopkins o mediante el algoritmo de la FFT.
- En el campo de la restauración de imágenes, pretendemos estudiar la restauración empleando filtros que introduzcan conocimiento sobre el error cometido en la determinación de la función degradadora.
- Como línea complementaria dentro de las investigaciones actualmente en curso pretendemos aplicar los procedimientos desarrollados en este trabajo a la restauración de imágenes de fondo de ojo.

APENDICE A:

En el capítulo 3 describimos el algoritmo integral de Hopkins. En este apéndice vamos a presentar todas las expresiones involucradas en el cálculo presentado entonces.

La expresión que queremos evaluar es la distribución de campo en el plano de observación de coordenadas (x_o, y_o) producida por un campo que se propaga una distancia z tras atravesar una lente de focal f situada en $z=0$.

El campo incidente en nuestro caso viene dado por la expresión:

$$U(x_1, y_1) = \exp\{i\phi_z(x_1, y_1)\} \quad (\text{A.1})$$

La expresión que queremos evaluar es la siguiente:

$$U(x_o, y_o) = \int_{A_s} \exp\{i\phi_z(x_1, y_1)\} \exp\left\{-i \frac{k}{2f} (x_1^2 + y_1^2)\right\} \exp\left\{i \frac{k}{2z} ((x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2)\right\} dx_1 dy_1 \quad (\text{A.3})$$

Pasando a coordenadas polares (ρ_o, θ_o) , y empleando el algoritmo integral de Hopkins la expresión que tenemos que calcular pasa a ser:

$$U(\rho_o, \theta_o) = \exp\left\{i \frac{k}{2z} \rho_o^2\right\} \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho_p \Delta\rho_p \Delta\theta_p \exp\{i\hat{\phi}(\rho_p, \theta_p)\} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Delta\rho_p}{2} \cdot \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\rho_p}\bigg|_{(\rho_p, \theta_p)}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Delta\theta_p}{2} \cdot \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\theta_p}\bigg|_{(\rho_p, \theta_p)}\right) \quad (\text{A.4})$$

siendo ρ_p, θ_p las coordenadas radial y angular en el plano de la pupila; ρ_o, θ_o las coordenadas del plano de observación, plano de la CCD.

A continuación presentamos todas las expresiones implicadas en (A.4).

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\rho_p, \theta_p) &= \phi_z + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right) \rho_p^2 - \frac{k}{z} \rho_o \rho_p \cos(\theta_o - \theta_p) \\
\phi_z(\rho_z, \theta_z) &= \sum_{i=2}^N a_i \cdot Z_i(\rho_z, \theta_z) \\
\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \rho_p} &= \frac{\partial \phi_z}{\partial \rho_p} + k \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right) \rho_p - \frac{k}{z} \rho_o \cos(\theta_o - \theta_p) \\
\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta_p} &= \frac{\partial \phi_z}{\partial \theta_p} - \frac{k}{z} \rho_o \rho_p \sin(\theta_o - \theta_p) \\
\frac{\partial \phi_z}{\partial \rho_p} &= \sum_{i=2}^N a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \rho_p} (Z_i(\rho_z, \theta_z))
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\rho_z &= \frac{1}{R} \left(\rho_p^2 + \rho_s^2 + 2\rho_p \rho_s \cos(\theta_s - \theta_p) \right)^{\frac{1}{2}} \\
\theta_z &= \arctg \left(\frac{\rho_p \sin(\theta_p) + \rho_s \sin(\theta_s)}{\rho_p \cos(\theta_p) + \rho_s \cos(\theta_s)} \right)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_z}{\partial \rho_p} &= \frac{\partial}{\partial \rho_z} (R_n^m) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\theta_z) \\ \sin(m\theta_z) \end{array} \right\} \cdot \frac{\rho_p + \rho_s \cos(\theta_s - \theta_p)}{R^2 \rho_z} + \\
&\quad + R_n^m \cdot \left\{ \begin{array}{l} -m \cdot \sin(m\theta_z) \\ m \cdot \cos(m\theta_z) \end{array} \right\} \cdot \frac{\rho_s \sin(\theta_p - \theta_s)}{R^2 \rho_z^2} \\
\frac{\partial \phi_z}{\partial \theta_p} &= \frac{\partial}{\partial \rho_z} (R_n^m) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\theta_z) \\ \sin(m\theta_z) \end{array} \right\} \cdot \frac{(-1) \rho_p \rho_s \sin(\theta_p - \theta_s)}{R^2 \rho_z} + \\
&\quad + R_n^m \cdot \left\{ \begin{array}{l} -m \cdot \sin(m\theta_z) \\ m \cdot \cos(m\theta_z) \end{array} \right\} \cdot \frac{\rho_p^2 + \rho_p \rho_s \cos(\theta_p - \theta_s)}{R^2 \rho_z^2}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

ρ_z, θ_z las coordenadas de los polinomios de Zernike definidos sobre la pupila del sistema; ρ_s, θ_s las coordenadas de las subpupilas respecto a la pupila del sistema y donde $R_n^m \equiv R_n^m(\rho_z)$ es la parte radial de los polinomios de Zernike cuya definición se puede encontrar en el capítulo 1, expresión (1.31).

Referencias:

Capítulo I

- {1} Ronald B. Stull, *An Introduction to the boundary layer meteorology*, Kluwer Publishers, 1994, Cap. 1, pp 1-5.
- {2} Michael C. Roggemann, Byron Welsh, *Imaging Through turbulence*, CRC Press, Boca Raton, 1996 Cap. 1, pp 4-5.
- {3} Robert K. Tyson, *Principles of Adaptive Optics*, Academic Press, San Diego, 1991, Cap.2 pp 25-27.
- {4} Ref. {2} Cap. 3, pp 59.
- {5} Anna Consortini, *Optical Propagation through the Atmosphere*, Adaptive Optics, International Trends in Optics, London, Academic Press, 1991, Cap. 19, pp 267-277
- {6} Joseph W. Goodman, *Statistical Optics*, John Wiley & Sons, New York, 1984, Cap.8, pp 285.
- {7} F. Roddier, *The effects of the atmospheric turbulence in optical astronomy*, Progress in Optics XIX, 1981, pp 283-374.
- {8} Ref. {2}, Cap. 3, pp 64.
- {9} Julius S. Bendat & Allan G. Piersol, *Random data, Analysis and Measurements Procedures*, John Wiley & Sons, 1986, Cap. 3, pp 58.
- {10} Charles W. Therrien, *Discrete random signals and statistical signal processing*, Printice Hall, New York, 1992, Cap. 4, pp 191
- {11} Ref {3}, Cap. 2, pp 28-29.
- {12} Ref. {3}, Cap. 2, pp 29-31.

- {13} Ref. {2}, Cap. 3, pp 60-62, 66-67.
- {14} Ref. {7}, Cap. pp 288-291.
- {15} Ref. {2}, Cap. 3, pp 62.
- {16} Ref. {2}, Cap. 3, pp 67-68.
- {17} Ref. {2}, Cap. 3, pp 69.
- {18} Ref. {2}, Cap. 3, pp 70.
- {19} D.L. Fried, *Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium For Very Long and Very Short Exposures*, Selected Papers on Adaptive and Speckle Imaging, SPIE Milestone Series Volume MS 93, 1994, pp 137-144.
- {20} Ref. {2}, Cap. 3, pp 73.
- {21} D.L. Fried, *Limiting Resolution Looking Down Through the Atmosphere*, Selected Papers on Adaptive Optics for Atmospheric Compensation, SPIE Milestone Series Volume MS 92, 1994, pp 116-120.
- {22} Ref. {2}, Cap. 3, pp 86-87.
- {23} Ref. {5}, Cap. 8, pp 402-407.
- {24} Ref. {2}, Cap. 3, pp 74.
- {25} Ref. {2}, Cap. 3, pp 92-98.
- {26} N. Roddier, *Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials*, Optical Engineering, October 1990, Vol. 29, No. 10, pp 1174-1180.
- {27} R.J. Noll, *Zernike polynomials and atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am., Vol 66, No.3, March 1976, pp 207-211.
- {28} D.L. Fried, *Probability of getting a lucky short-exposure image through turbulence*, J. Opt. Am., Vol. 68, No. 12, December 1978, pp 1651-1658.
- {29} Louis L. Scharf, *Statistical Signal Processing, Detection, Estimation & Series Analysis*, Addison-Wesley, 1991, Cap. 2, pp 61-62.
- {30} J.Y. Wang and J.K. Markey, *Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion*, J. Opt. Soc. Am., Vol. 68, No. 1, January 1978, pp 78-87.

- {31} Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, San Francisco, 1968, Cap. 2, pp 17-21.
- {32} Hecht-Zajac, *Optica*, Addison-Wesley, Wilmington, 1986, Cap. 11, pp 429.
- {33} Ref. {31}, Cap. 6, pp 104.
- {34} Ref. {31}, Cap. 6, pp 105.
- {35} Ref. {31}, Cap. 6, pp 111.
- {36} Ref. {31}, Cap. 6, pp 113.
- {37} Ref. {31}, Cap. 6, pp 114.
- {38} Ref. {31}, Cap. 6, pp 115.
- {39} Ref. {31}, Cap. 6, pp 121.
- {40} Ref. {6}, Cap. 7, pp 331-335.
- {41} Ref. {2}, Cap. 2, pp 39-41.
- {42} Ref. {2}, Cap. 2, pp 40.
- {43} Ref. {6}, Cap. 5, pp 207-211.
- {44} Ref. {2}, Cap. 2, pp 37-39.
- {45} Ref. {6} Cap. 7, pp 335.
- {46} Ref. {6} Cap. 7, pp 207.
- {47} Ref. {2}, Cap. 3, pp 82.
- {48} Ref. {2}, Cap. 3, pp 81.
- {49} Ref. {2}, Cap. 2, pp 19.
- {50} Ref. {2}, Cap. 3, pp 84-85.
- {51} Ref. {2}, Cap. 3, pp 87.
- {52} Ref. {2}, Cap. 3, pp 90-91.
- {53} D.L.Fried, *Statistics of a Geometric representation of Wavefront Distortion*, Selected Papers on Adaptive Optics and Speckle Imaging, SPIE Milestone Series Volume MS 93, 1994, pp 107-115.

Capítulo II

- {1} A. Labeyrie, *Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Star Images*, Selected Papers on Adaptive Optics and Speckle Imaging, SPIE Milestone Series Volume MS 93, 1994, pp 303-305.
- {2} K.T. Knox, B.J. Thompson, *Recovery of images from atmospherically degraded short-exposure photographs*, Selected Papers on Adaptive Optics and Speckle Imaging, SPIE Milestone Series Volume MS 93, 1994, pp 317-320.
- {3} M.J. Beran and J. Oz-Vougt, *Imaging through turbulence in the atmosphere*, Progress in Optics XXXIII, 1994, Cap. V, pp 320-388.
- {4} M.C. Roggemann, C.L. Matson, *Power spectrum and Fourier phase spectrum estimation by using fully and partially compensating adaptive optics and biespectrum postprocesing*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 9, No. 9, September 1992, 1525-1535.
- {5} Michael C. Roggemann, Byron Welsh, *Imaging Through turbulence*, CRC Press, Boca Raton, 1996, Cap. 1, pp 145-158.
- {6} Henry Stark, *Imagen Recovery, Theory and Application*, Academic Press, London, 1987, Cap. 7, pp 231-276.
- {7} J.R. Fienup, *Phase retrieval algorithms: a comparison*, Applied Optics, Vol. 21, No. 15, 1 August 1982, pp 2758-2769.
- {8} Ref. {6}, Cap. 4, pp 262-263.
- {9} Ref. {5}, Cap. 4, pp 145-153.
- {10} L.A. Thompson, *Adaptive Optics in Astronomy*; Physics Today, December 1994, pp 24-31.
- {11} J. M. Beckers, *Adaptive Optics for Astronomy: Principles, Performance, and Applications*, Selected Papers on Adaptive Optics for Atmospheric Compensation, SPIE Milestone Series Volume MS 92, XX, pp 241-289.

- {12} J.W. Hardy, *Active Optics: A New Technology for the Control of Light*, Selected Papers on Adaptive Optics for Atmospheric Compensation, SPIE Milestone Series Volume MS 92, XX, pp 91-137.
- {13} C.S. Gardner, B. Welsh, L.A. Thompson, *Design and Performance Analysis of Adaptive Optical Telescopes Using laser Guide Stars*, pp 541-562.
- {14} H.W. Babcock, *The Possibility of Compensating Astronomical Seeing*, Selected Papers on Adaptive Optics for Atmospheric Compensation, SPIE Milestone Series Volume MS 92, XX, pp 13-16.
- {15} Ref. {5}, Cap. 5, pp 182-186.
- {16} M. Sechaud, G. Rousset, V. Michau, J.C. Fontanella, *Wavefront sensing in imaging through the atmosphere: a detector strategy*, SPIE Vol. 1543 Active and Adaptive Optical Components 1991, pp 479-489.
- {17} R.C. Cannon, *Global wavefront reconstruction using Shack-Hartmann sensors*, Observatoire de Lyon.
- {18} T.L. Pennington, B.M. Welsh and M.C. Roggemann, *Performance comparison of Shearing Interferometer and Hartmann wavefront Sensors*, SPIE Vol. 2201 Adaptive Optics in Astronomy (1994), pp 508-518.
- {19} Ref. {5}, Cap. 6, pp 245-312.
- {20} J. Primot, G. Rousset, J.C. Fontanella, *Deconvolution from wave-front sensing: a new technique for compensating turbulence-degraded images*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 7, No. 9, September 1990, pp 1598-1608.
- {21} J.D. Gonglewski, D.G. Voelz, J.S. Fender, D.C. Dayton, B.K. Spielbusch, and R.E. Pierson, *First astronomical application of postdetection turbulence compensation: images of α Aurigae, ν Ursae Majoris, and α Germinorum using self-referenced speckle holography*, Applied Optics, Vol. 29, No. 31, 1 November 1990, pp 4527-4529.

- {22} M.C. Roggemann, J.A. Meinhardt, *Image reconstruction by means of wave-front sensor measurements in closed-loop adaptive-optics systems*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 10, No. 9, September 1993, pp 1996-2007.
- {23} M.C. Roggemann, B. Welsh, *Signal-to-noise ratio for astronomical imaging by deconvolution from wave-front sensing*, Applied Optics, Vol.33, No. 23, 10 August 1994, pp 5400-5414.
- {24} M.C. Roggemann, D.W. Tyler, M.F. Bilmont, *Linear reconstruction of compensated images: theory and experimental results*, Applied Optics, Vol. 31, No. 35, December 1992, pp 7429-7441.
- {25} M.C. Roggemann, D.W. Tyler, *Model based image reconstruction by means of a constrained least-squares solution*, Applied Optics, Vol. 36, No. 11, April 1997, pp 2360-2369.
- {26} D. Dayton, J. Gonglewski, *Measurements of Estimator Bias for Deconvolution from Wave-front sensing*, Proceedings of the ESO on Topical meeting on Adaptive Optics, Germany, October 1995, pp 341-364.
- {27} B.M. Welsh, R.N. VonNiederhausern, *Performance analysis of the self-referenced speckle-holography image-reconstruction technique*, Applied Optics, Vol. 32, No. 26, September 1993, pp 5071-5078.
- {28} S.D. Ford, B.W. Welsh, M.C. Roggemann, *Reconstruction of turbulence-degraded images using the vector Wiener filter*, Optical Engineering, Vol. 37, September 1998, pp 2491-2500.
- {29} J.Y. Wang, J.K. Markey, *Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 68, No. 1, January 1978, pp 78-87.
- {30} J. Morgan, D.C. Slater, J.G. Timothy, E.B. Jenkins, *Centroid position measurements and subpixel sensitivity variations with the MAMA detector*, Applied Optics, Vol. 28, No. 6, March 1989, pp 1178-1192.
- {31} G. Cao, *Accuracy analysis of a Hartmann-Shack wavefront sensor operated with a faint object*, Optical Engineering, Vol. 33, No. 7, July 1994, pp 2331-2335.

- {32} D.L. Fried, Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements, pp 388-393.
- {33} R. Cubalchini, *Modal wave-front estimation from phase derivative measurements*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 69, No. 7, July 1979, pp 972-977.
- {34} V.V. Voitsekhovich, S. Bará, S. Ríos, E. Acosta, *Minimum-variance phase reconstruction from hartmann sensors with circular subpupils*, Optics Communications 148, 1998, pp 225-229.
- {35} P.B. Liebelt, *An introduction to Optimal Estimation*, Addison-Wesley, 1967, Cap. 5, pp 135-173.
- {36} R.J. Noll, *Zernike polynomials and atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am., Vol 66, No.3, March 1976, pp 207-211.
- {37} Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, San Francisco, 1968, Cap. 2, pp 17-21.
- {38} Hecht-Zajac, *Optica*, Addison-Wesley, Wilmington, 1986, Cap. 11, pp 429.
- {39} Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods, *Tratamiento digital de imágenes*, Addison-Wesley, Wilmington, 1996, Cap. 5 pp 275-329.
- {40} A.K. Katsaggelos, *Digital image Restoration*, Springer-Verlag, Illinois, 1989, Cap.1, pp 1-18.
- {41} E.S. Meinel, *Origins of linear and nonlinear recursive restoration algorithms*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 3, No. 6, June 1986, pp 787-799.
- {42} Ref. {35}, Cap. 5, pp 275.
- {43} Ref. {35}, Cap. 5, pp 279-283.
- {44} Ref. {35}, Cap. 5, pp 287-291.
- {45} J. Biemond, R.L. Lagendijk, R.M. Mersereau, *Iterative Methods for image Deblurring*, Proceedings of the IEEE, Vol. 78, No. 5, May 1990, pp 856-883.
- {46} Ref. {35}, Cap. 5, pp 292-293.

- {47} L. Guan, R.K. Ward, *Restoration of Randomly Blurred Images by the Wiener Filter*, IEEE Trans. Acoust. Speech, and Signal Processing, ASSP-37, No. 4, April 1989, pp 589-592.
- {48} L. Guan, R.K. Ward, *Restoration of stochastically blurred images by the geometrical mean filter*, Optical Engineering, Vol.29, No. 4, April 1990, pp 289-295.
- {49} R.K. Ward, E. Lam, *Semi-Blind Restoration From Differently Blurred Versions of an Image*, Proc. of the Canadian Society for Electrical and Computer Engineering, pp 2949-2952.
- {50} L. Guan, R.K. Ward, *Restoration of Randomly Blurred Images by the Wiener Filter*, IEEE Trans. Acoust. Speech, and Signal Processing, ASSP-37, No. 4, April 1989, pp 589-592.
- {51} R.K. Ward, B.E.A. Saleh, *Restoration of images distorted by systems of random impulse response*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 2, No. 8, August 1985, pp 1254-1259.
- {52} R.K. Ward, B.E.A. Saleh, *Restoration of images distorted by systems of random time-varying impulse response*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol.3, No. 6, June 1986, pp 800-807.
- {53} R.E.A. Saleh and M. Rabbani, *Restoration of bilinearly distorted images: I. finite impulse response linear digital filtering*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol.73, No. 1, January 1983, pp 66-70.
- {54} L. Guan, R.K. Ward, *Deblurring random time-varying blur*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol.6, No. 11, November 1989, pp 1727-1737.
- {55} F. Roddier, *Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics*, Applied Optics, Vol 27, ,1988, pp 1223-1225.
- {56} S. Ríos, L. Gato, E. Acosta, T. Kato, K. Iga, *Estimation of Optical Phase Aberrations of Micro-Optics Components by the Irradiance Transport Equation*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 37, 1998, pp 3686-3690.

- {57} C. Roddier, F. Roddier, *Wave-front reconstruction from defocused images and the testing of ground-based optical telescopes*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 10, No. 11, November 1993, pp 2277-2287.
- {58} J. Mayor, *Estimadores modales óptimos de Gauss-Markov para sensores Shack-Hartmann*, Universidad de Santiago de Compostela, 1999, Cap. 1, pp 16-21.
- {59} Ref {58}, Cap. 1, pp 23-32.
- {60} Ref {58}, Cap. 1, pp 29.
- {61} Ref {58}, Cap. 1, pp 33-41.
- {62} Ref {5}, Cap. 1, pp 72.
- {63} G. Tyler, D.L. Fried, *Image-position error associated with a quadrant detector*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 72, No. 6, June 1982, pp 804-808.
- {64} Ref. {5}, Cap. 5, pp 186-190.
- {65} Ref {58}, Cap. 3, pp 52-58.

Capítulo III

- {1} N. Roddier, *Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials*, Optical Engineering, October 1990, Vol. 29, No. 10, pp 1174-1180.
- {2} R.J. Noll, *Zernike polynomials and atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am., Vol 66, No.3, March 1976, pp 207-211.
- {3} D.L. Fried, *Probability of getting a lucky short-exposure image through turbulence*, J. Opt. Am., Vol. 68, No. 12, December 1978, pp 1651-1658.
- {4} J. Morgan, D.C. Slater, J.G. Timothy, E.B. Jenkins, *Centroid position measurements and subpixel sensitivity variations with the MAMA detector*, Applied Optics, Vol. 28, No. 6, March 1989, pp 1178-1192.

- {5} E. Acosta, S. Bará, M. Rama, S. Ríos, *Determination of phase mode components in terms of local wave-front slopes: an analytical approach*, Optics Letters, Vol. 20, No. 10, May 1995, pp 1083-1085.
- {6} E.P.Wallner, *Optimal wave-front correction using slopes measurements*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 73, No. 12, December 1983, pp 1771-1776.
- {7} Michael C. Roggemann, Byron Welsh, *Imaging Through turbulence*, CRC Press, Boca Raton, 1996, Cap. 3, pp 99.
- {8} J. Biemond, R.L. Lagendijk, R.M. Mersereau, *Iterative Methods for image Deblurring*, Proceedings of the IEEE, Vol. 78, No. 5, May 1990, pp 856-883.
- {9} C.W.Therrien, *Discrete Random Signal and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992, Cap.2, pp 54-60.
- {10} J.J. Stamness, *Waves in focal regions*, Adam Higer Series on Optics and Optoelectronics, Bristol and Boston, 1986, Cap. 7, pp 60-61.
- {11} D. Koutznesov, V.V. Voitsekhovich, R. Ortega-Martinez, *Simulation of turbulence-induced phase and log-amplitude distortions*, Applied Optics, Vol. 36, No. 2, 10 January, 1997
- {12} J. Primot, G. Rousset, J.C. Fontanella, *Deconvolution from wave-front sensing: a new technique for compensating turbulence-degraded images*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 7, No. 9, September 1990, pp 1598-1608.

Capítulo IV

- {1} N. Roddier, *Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials*, Optical Engineering, October 1990, Vol. 29, No. 10, pp 1174-1180.
- {2} R.J. Noll, *Zernike polynomials and atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am., Vol 66, No.3, March 1976, pp 207-211.

- {3} P.B. Liebelt, *An introduction to Optimal Estimation*, Addison-Wesley, 1967, Cap. 5, pp 135-173.
- {4} V.V. Voitsekhovich, S. Bará, S. Ríos, E. Acosta, *Minimum-variance phase reconstruction from hartmann sensors with circular subpupils*, Optics Communications 148, 1998, pp 225-229.
- {5} Michael C. Roggemann, Byron Welsh, *Imaging Through turbulence*, CRC Press, Boca Raton, 1996, Cap. 5, pp 200.